El teorema de Gauss.

Supongamos una superficie que es atravesada por las líneas de fuerza de un campo eléctrico. Definimos flujo de dicho campo eléctrico a través de la superficie como $\phi = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{S} = E \cdot S \cdot \cos \alpha$, es decir, el producto vectorial de la intensidad de campo eléctrico por el área.

Si tenemos en cuenta que la intensidad de campo está relacionada con la densidad de líneas de fuerza, el flujo representará el número de líneas de fuerza que atraviesan una determinada superficie. Para un elemento de superficie, d$\overrightarrow{S}$, tendremos que d$\phi = \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S}$, e integrando:

$$\phi = \int d\phi = \int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S}$$

Supongamos ahora una carga puntual q situada en el centro de una esfera de radio r . Vamos a calcular el flujo del campo eléctrico creado por dicha carga a través de la superficie esférica.

$$\phi = \int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \int \frac{Kq}{r^2} dS = \frac{Kq}{r^2} \int dS = \frac{4\pi r^2 Kq}{r^2} = 4\pi Kq$$

ya que al ser r constante (radio de la esfera), puede ser sacado fuera de la integral,a la vez que K y q (también constantes).

Si sustituimos K por $1/4\ \pi\varepsilon$, tendremos:

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon}$$

Vamos a ver a continuación que este resultado va a tener un carácter general, sea o no puntual la carga, y esté rodeada por una superficie cerrada esférica o no esférica.

Supongamos ahora una carga q encerrada por una superficie, tal como podemos ver en la siguiente imagen:

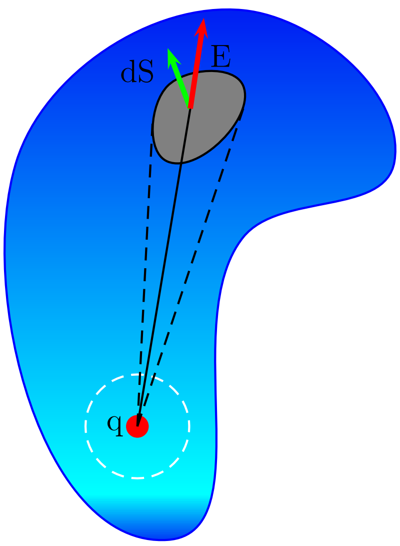

Figura 1: Carga encerrada en una superficie gaussiana

El flujo a través de esta superficie será:

$$\phi = \int \frac{Kq}{r^2} dS\cos\alpha$$

Supongamos un punto O situado a una distancia r de una superficie S, no necesariamente plana, y consideremos un cono con vértice en O cuyas generatrices pasen por el contorno de S. A continuación construimos una esfera de radio unidad con centro en O (en la imagen anterior, la línea blanda de trazos). Al área de la superficie de la esfera interceptada por el cono se la conoce por ángulo sólido y su valor es:

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

siendo su unidad el estereorradián. Si consideramos una superficie S cualquiera que encierre totalmente a la esfera de radio unidad, el área de la superficie esférica interceptada será el área total de la esfera, es decir, $4\pi r^2$, con lo que el ángulo sólido correspondiente a cualquier superficie cerrada<será 4πestereorradianes. De esta forma, podremos poner:

$$\boxed{\phi = \int \frac{Kq}{r^2} dS\cos\alpha = Kq \int \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = Kq \int d\Omega = 4\pi Kq = \frac{q}{\varepsilon}}$$

que como vemos, confirma el resultado obtenido anteriormente.

Así pues, podemos enunciar el teorema de Gauss de la siguiente forma: ***"El flujo del campo eléctrico creado por una carga a través de una superficie que encierra a dicha carga es igual al cociente de dicha carga entre la permitividad del medio"***.

1. Aplicaciones del teorema de Gauss.

1.1. Campo eléctrico creado por un hilo rectilíneo e indefinido.

Para hallar la intensidad de campo eléctrico creado por un hilo rectilíneo e indefinido a una distancia a del mismo, supondremos dicho hilo, cuya densidad lineal de carga es λ C/m, rodeado por una superficie gaussiana de forma cilíndrica, siendo a el radio de cada una de las bases de dicho cilindro.

Como puede verse, el ángulo formado entre $\overrightarrow{E}$ y d$\overrightarrow{S}$ es de 90º para las bases del cilindro y 0º para la superficie lateral de aquel, por lo que, aplicando el teorema de Gauss, tendremos:

$$\int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = E \int dS = \frac{q}{\varepsilon}$$

Si ponemos q en función de la densidad lineal de carga, tendremos que q = λL, siendo L la longitud del hilo. Sustituyendo S por su valor (área lateral del cilindro), tendremos:

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon S} = \frac{\lambda L}{\varepsilon 2\pi a L} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon a}}$$

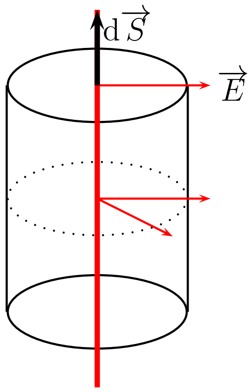

Figura 2: Campo eléctrico creado por un conductor rectilíneo

1.2. Campo eléctrico creado por una esfera conductora y por una esfera dieléctrica.

Calcularemos ahora la intensidad de campo eléctrico, tanto para una esfera conductora como para una esfera dieléctrica en los puntos en que se cumpla $r_1 > R$,$r_2 = R$ y $r_3 < R$, siendo r la distancia desde el centro de la esfera al punto en el que queremos determinar el valor del campo, y R el radio de la esfera. Tomaremos como superficie gaussiana en cada uno de los casos, una esfera concéntrica con la esfera objeto del problema, y con radio r_1,r_2o r_3, respectivamente.

En el caso de una esfera cargada, al distribuirse toda la carga eléctrica por su superficie, el campo eléctrico tendrá los siguientes valores:

- Para $r_1 > R$:La superficie gaussiana encierra toda la carga de la esfera, por lo que podremos poner:

$$\phi = \int \overrightarrow{E} d\overrightarrow{S} = E \int dS = \frac{q}{\varepsilon}$$

con lo que nos quedará:

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon S} = \frac{q}{4\pi r_1^2 \varepsilon} = \frac{Kq}{r_1^2}}$$

Es decir, el campo eléctrico en el exterior de la esfera será el mismo que el que crearía una carga puntual q a una distancia r_1.

- Para $r_2 = R$:La situación es idéntica al apartado anterior, con la única diferencia de que la expresión final será:

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon S} = \frac{q}{4\pi r_2^2 \varepsilon} = \frac{Kq}{R^2}}$$

- Para $r_3 < R$: En este caso, al ser la superficie gaussiana una esfera de menor radio que el de la esfera cargada, no contiene ninguna carga en su interior, por lo cual:

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon S} = 0}$$

Para una esfera dieléctrica (no conductora, la carga se distribuye uniformemente en todo su volumen. Llamaremos σ a la densidad de carga (carga/volumen) de dicha esfera. Para valores de $r \leq R$,donde r es el radio de la superficie gaussiana, los resultados son idénticos a los obtenidos para una esfera conductora, es decir, $E = Kq/r^2$.Sin embargo, en el interior de la esfera, la superficie gaussiana, de radio r_3, no encierra toda la carga de la esfera, sino una carga $q' = \sigma V' = \sigma \cdot \frac{4}{3}\pi r_3^3$, de tal forma que podremos poner:

$$\boxed{E = \frac{q'}{\varepsilon S} = \frac{4/3\pi r_3^3\sigma}{4\pi r_3^2\varepsilon} = \frac{\sigma r_3}{3\varepsilon}}$$

Vamos a comprobar que en la superficie de la esfera, la intensidad de campo responde también a la expresión que acabamos de obtener. Si sustituimos la carga q por $\sigma \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$, tendremos:

$$\boxed{E = \frac{4/3\pi R^3\sigma}{4\pi R^2\varepsilon} = \frac{\sigma R}{3\varepsilon}}$$

1.3. Campo eléctrico creado por una lámina plana e indefinida.

Supongamos ahora una lámina plana cargada, con una densidad de carga δ C/m^2. Como superficie gaussiana tomaremos un cilindro de radio r perpendicular a dicha superficie, tal y como puede verse en la siguiente figura:

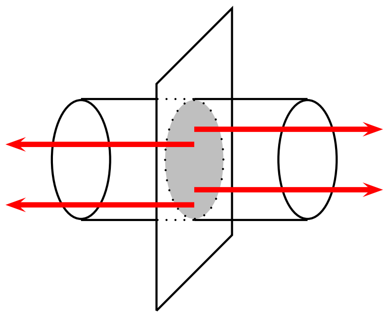

Figura 3: Campo eléctrico creado por una lámina plana

Por aplicación del teorema de Gauss, tendremos:

$$\boxed{E \cdot S = \frac{q}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon 2S} = \frac{\delta S}{\varepsilon 2S} = \frac{\delta}{2\varepsilon}}$$

ya que el ángulo formado por $\overrightarrow{E}$ y el área lateral del cilindro es de 90º, mientras que el ángulo formado por $\overrightarrow{E}$ y las *dos bases* del cilindro es de 0º. De esta forma, la superficie atravesada por las líneas de fuerza del campo eléctrico será $2S$.

Como puede verse, la intensidad de campo eléctrico no depende de la distancia a la placa a la que se encuentre un punto dado, sino únicamente de la densidad superficial de carga y de la permitividad del medio.

1.4. Campo eléctrico creado entre dos láminas planas paralelas e indefinidas, con cargas del mismo valor y signo contrario.

Aplicando el resultado del apartado anterior para cada una de las placas, veremos que en un punto comprendido entre ambas, el campo eléctrico será la suma de los vectores campo debidos a cada una de las placas por separado. Como el vector campo debido a la placa cargada positivamente tiende a alejarse de ésta, mientras que el debido a la placa cargada negativamente se dirige hacia ella, podemos ver que el módulo del campo debido a las dos placas será:

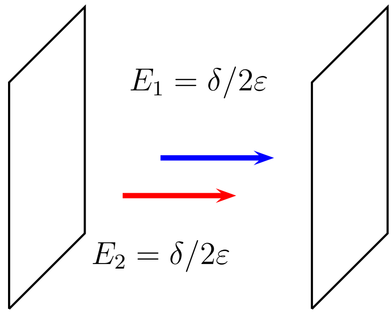

Figura 4: Campo eléctrico creado por dos láminas planas paralelas

$$\boxed{\mid \overrightarrow{E} \mid = \mid \overrightarrow{E_1} \mid + \mid \overrightarrow{E_2} \mid = \frac{\delta}{2\varepsilon} + \frac{\delta}{2\varepsilon} = \frac{\delta}{\varepsilon}}$$

Como puede verse, el campo creado en un punto situado entre las dos placas es constante, independientemente de la distancia del punto a cada una de las placas. Según esto, tendremos:

$$\mid \overrightarrow{E} \mid = \left| -\frac{dV}{d\overrightarrow{r}} \right| = \frac{\Delta V}{\Delta r} \text{ y, en consecuencia } \Delta V = E\Delta r$$