Aplicaciones de las leyes de Kepler y de la Gravitación Universal.

1. Velocidad de escape.

Definimos velocidad de escape como la mínima velocidad que debe comunicarse a un cuerpo para escapar de la atracción gravitatoria de un planeta. Para calcular dicha velocidad de escape, recurriremos al principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Si suponemos r_0 como el radio del planeta, y $v_e$la velocidad de escape del mismo, podremos poner:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{r_0} = 0$$

puesto que a una distancia infinita, la energía potencial vale cero, y también la energía cinética .Recordemos que cuando se lanza un cuerpo desde la superficie de un planeta, suponiendo la inexistencia de ninguna otra fuerza de atracción, la velocidad irá disminuyendo con la distancia, y se hará nula a una distancia infinita (recordemos que la velocidad de escape es una velocidad mínima). Así pues, despejando, tendremos:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GMm}{r_0} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}}$$

2. Velocidad de un satélite en una órbita.

Suponiendo circular la órbita de un satélite y aplicando el 2º Principio de la Dinámica, $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$, tendremos que, al igualar el módulo de la fuerza a la masa por el módulo de la aceleración (centrípeta, pues se trata de un movimiento circular):

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

de donde despejando al velocidad, obtendremos:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

Es decir, la velocidad de un satélite en una órbita sólo depende del radio de la misma (distancia entre los centros del planeta y del satélite) y de la masa del planeta.

3. Energía de un satélite en una órbita.

La energía total de un satélite será la suma de las energía cinética y potencial, es decir:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Si sustituimos la expresión de la velocidad anteriormente obtenida, nos quedará:

$$E = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Es de destacar que la energía cinética del satélite es igual a la energía total del mismo cambiada de signo.

4. Periodo de un satélite.

Se obtiene por aplicación directa de la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

siendo r el radio de la órbita y M la masa del planeta respecto al que se describe aquella.

5. Órbitas geoestacionarias.

Se dice que un satélite describe una órbita geoestacionaria cuando se encuentra siempre sobre la vertical de un mismo punto de la superficie terrestre. Como consecuencia, el periodo de revolución del satélite alrededor de la Tierra será el mismo que el que ésta emplee un dar una vuelta completa sobre su eje, es decir, un día (86400 segundos). De esta forma, si conocemos el producto GM, podemos calcular la distancia respecto del centro de la Tierra a la que el satélite describe la órbita, por aplicación de la tercera ley de Kepler:

$$86400^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{86400^2 GM}{4\pi^2}}$$