Obtención de las transformaciones inversas de Lorentz.

A partir de las expresiones correspondientes a las transformaciones directas de x′ y t′:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

despejamos t en cada una de ellas, obteniendo:

$$t = \frac{x - x'/\gamma}{v} \quad \text{para la primera y} \quad t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{vx}{c^2} \quad \text{para la segunda}$$

Igualando los segundos miembros de ambas igualdades, tendremos:

$$\frac{x - x'/\gamma}{v} = \frac{t'}{\gamma} + \frac{vx}{c^2} \Rightarrow x - \frac{x'}{\gamma} = \frac{vt'}{\gamma} + \frac{v^2 x}{c^2}$$

Pasando todos los términos con x al primer miembro y sacando factor común, obtenemos:

$$x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x' + vt'\right)$$

Si tenemos en cuenta que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, tendremos que 1-$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$, por lo que:

$$\frac{x}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma}\left(x' + vt'\right)$$

y, finalmente:

$$\boxed{x = \gamma(x' + vt')}$$

Para obtener la transformación inversa de t, despejamos x en las transformaciones directas de x′ y t′, obteniendo:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt \quad \text{y} \quad x = \frac{\left(t - \frac{t'}{\gamma}\right)c^2}{v}$$

Igualando los segundos miembros de ambas igualdades, tendremos:

$$\frac{x'}{\gamma} + vt = \frac{\left(t - \frac{t'}{\gamma}\right)c^2}{v} \Rightarrow \frac{vx'}{\gamma} + v^2 t = c^2\left(t - \frac{t'}{\gamma}\right)$$

Pasando todos los términos con t al primer miembro y sacando factor común, se obtiene:

$$t(v^2 - c^2) = -\frac{1}{\gamma}\left(vx' + c^2 t'\right)$$

Dividiendo por c^2en ambos miembros:

$$t\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{vx'}{c^2} + t'\right)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{v^2}{c^2} - 1 = -\frac{1}{\gamma^2}$, nos quedará, finalmente:

$$t = \frac{\gamma^2}{\gamma}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

de donde se deduce:

$$\boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)}$$

Contracción de la longitud y dilatación del tiempo.

Antes de analizar estos dos fenómenos, definiremos los conceptos de longitud propia y tiempo propio. El primero de ellos se define como la longitud de un objeto que se encuentra en reposo respecto a un determinado sistema inercial de referencia, mientras que el tiempo propio es el intervalo de tiempo medido por un reloj que se encuentra en reposo respecto a un sistema de referencia inercial. Representaremos la longitud propia por Δx′, mientras que el tiempo propio será representado por Δt′.

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales, desplazándose el segundo (O′) respecto al primero (O) con una velocidad v. En el segundo sistema, la longitud de una varilla vendrá dada por la diferencia $x'_2 - x'_1$, siendo x'_2 y x'_1 la coordenadas x del extremo y del origen de la varilla, respectivamente. Utilizando la transformación de Lorentz, $x' = \gamma(x - vt)$, tendremos:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) = \gamma(x_2 - x_1)$$

por lo que:

$$\boxed{\Delta x' = \gamma \Delta x}$$

Como puede verse, la longitud del objeto medido por un observador unido al sistema de referencia con origen en O, Δx, será el cociente entre la longitud propia del objeto en el sistema con origen en O′; $\Delta x'$ y γ. La longitud medida respecto al primer sistema será inferior a la correspondiente al segundo sistema, fenómeno que se conoce como *contracción de la longitud*.

Supongamos ahora un intervalo de tiempo, $\Delta t'$, medido por un observador de un sistema de referencia O′ que se desplaza con velocidad v respecto a otro con origen en O. Si utilizáramos la transformación de Lorentz para el tiempo, $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$, tendríamos que:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right)$$

puesto que el intervalo de tiempos será apreciado por el observador O para dos posiciones distintas, x_2 y x_1. Si, por el contrario, utilizamos las transformaciones inversas, tendremos que:

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t'_2 + \frac{vx'}{c^2}\right) - \gamma\left(t'_1 + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

De lo anterior podemos deducir la expresión:

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$$

En consecuencia, el intervalo de tiempo medido por el observador O será mayor que el medido por el observador O′ . Se ha producido, por tanto, el fenómeno de la *dilatación del tiempo*.