Movimiento armónico simple.

1.1. Concepto de movimiento armónico simple: Su ecuación.

Supongamos un muelle que cuelga verticalmente, y de cuyo extremo libre pende una masa m. Si tiramos de la masa y soltamos a continuación, veremos que la masa, junto con el muelle, experimenta un movimiento de oscilación alrededor de una posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina movimiento vibratorio armónico simple (abreviadamente MAS), y se caracteriza, además del movimiento de oscilación alrededor de una posición de equilibrio anteriormente indicado, por la existencia de una fuerza recuperadora que tiende a devolver el cuerpo a la posición de equilibrio y que depende de la posición de dicho cuerpo y por que tiene lugar *en una dimensión*.

Supongamos el movimiento de una pelota que rebota verticalmente contra el suelo. Este movimiento cumple con alguna de las condiciones del MAS, como es el que se produzca en una dimensión, y que la pelota oscile alrededor de una posición de equilibrio. No obstante, no se cumple la condición de que sobre la pelota actúe una fuerza recuperadora dependiente de la posición: en efecto, la fuerza que actúa sobre la pelota es siempre la misma, mg, es decir su peso.

Para obtener la ecuación del MAS, supondremos una partícula que describa un movimiento circular uniforme de radio A. Consideraremos la proyección de la posición de la partícula, respecto del eje X, como se puede ver en la siguiente figura:

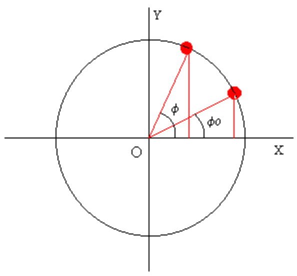

Figura 1: Proyección sobre un eje

Si tenemos en cuenta la ecuación del movimiento circular uniforme y suponemos $t_0 = 0$:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \quad \text{de donde se deduce} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t$$

tendremos que las proyecciones de la posición de la partícula sobre los ejes X e Y serán, respectivamente:

$$x = A \operatorname{sen} \varphi = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A \cos \varphi = A \cos (\omega t + \varphi_0)$$

Si tenemos en cuenta que ambos ejes son intercambiables, podemos tomar como ecuación de la proyección de la partícula sobre un eje, cualquiera de las dos anteriores.

La ecuación $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$ es representativa de un movimiento de oscilación en una dimensión, entre dos posiciones +A y -A y, como veremos posteriormente, con una aceleración dependiente de la posición.

1.2. Parámetros del movimiento armónico simple.

Elongación (x): distancia de la partícula a la posición de equilibrio para un momento dado. Se mide en unidades de longitud.

Amplitud (A): máxima distancia a la posición de equilibrio (máxima elongación). Se mide en unidades de longitud.

Frecuencia (ν): número de oscilaciones que describe la partícula por unidad de tiempo. Se mide en unidades de tiempo^{-1}.

Periodo (T): tiempo necesario para describir una oscilación. Se relaciona con la frecuencia mediante la expresión $\nu = \frac{1}{T}$. Se mide en unidades de tiempo.

Pulsación (ω): Está relacionada con la frecuencia de la forma $\omega = 2\pi\nu$. Se mide en las mismas unidades que la frecuencia.

Fase inicial (φ_0): Magnitud relacionada con la elongación de la partícula en el instante inicial. Así, a partir de la ecuación x = A sen (ωt + φ_0),veremos que para t = 0, tendremos x = A sen φ_0.

1.3. Cinemática del movimiento armónico simple.

Si tenemos en cuenta que la velocidad viene dada por la expresión: $v = \frac{dx}{dt}$, veremos que, al aplicarla a la expresión $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$, nos dará como resultado:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)}{dt} = A\,\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Como podemos ver, la velocidad de la partícula es una función periódica del tiempo. Si por otra parte, aplicamos la definición de aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(-A\,\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)}{dt} = -A\,\omega^2\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right) = -\omega^2 x$$

Con lo cual, veremos que la aceleración del MAS depende de la posición, tal y como habíamos comentado en el apartado anterior.

En resumen, las ecuaciones que representan la cinemática del MAS son las siguientes:

$$\boxed{\begin{gathered} x = A\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right) \\ v = A\,\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \\ a = -A\,\omega^2\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right) = -\omega^2 x \end{gathered}}$$

En la siguiente imagen podemos ver los vectores velocidad y aceleración correspondientes a la proyección sobre el eje X de la posición de una partícula que describe un movimiento circular uniforme.

1.4. Dinámica del movimiento armónico simple.

1.4.1. Oscilaciones de un resorte.

Si sujetamos un muelle del techo y colgamos una masa de su extremo libre, observaremos que se produce un alargamiento, que dependerá directamente del valor de la masa.

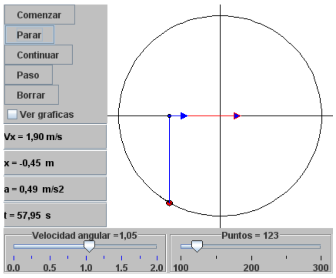

Figura 2: Velocidad y aceleración en un MAS

Al soltarla del muelle, éste tiende a recuperar su longitud inicial, de donde se deduce que al deformar un muelle, aparecerá sobre el mismo una fuerza recuperadora, que será tanto más fuerte cuanto mayor sea la deformación experimentada. La expresión matemática de este comportamiento es:

$$F = -Kx$$

siendo x la deformación experimentada por el resorte y K una constante característica del mismo. Esta expresión matemática se conoce como Ley de Hooke.

Si suponemos un muelle del que cuelga una masa y estiramos de la misma hasta separarla de su posición de equilibrio para , posteriormente, dejar que el sistema oscile libremente, al aplicar el segundo principio de la dinámica, F = ma, teniendo en cuenta que el sistema experimentará un MAS, tendremos:

$$F = ma = -Kx$$

Por otra parte, la aceleración se define como la derivada de la velocidad respecto al tiempo, o la segunda derivada de la posición respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{con lo cual} \qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

lo que constituye la ecuación diferencial del movimiento para un muelle. Esta ecuación tiene como soluciones $x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_o)$o bien $x = A\,cos\,(\omega t + \varphi_0)$. Si tomamos la primera expresión y derivamos dos veces con respecto al tiempo, tendremos que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\,\omega^2 \mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$$

con lo que, al sustituir en la ecuación diferencial:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = -m\,A\,\omega^2 \mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0) + K\,A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = 0$$

De la igualdad anterior se deduce que:

$$-m\omega^2 + K = 0 \quad \text{de donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

El periodo de oscilación del resorte se obtendrá de la igualdad $\omega = 2\pi/T$. De la misma forma, podemos obtener la frecuencia despejando de la igualdad $\omega = 2\pi\nu$. Al despejar T, nos queda:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

mientras que la frecuencia tendrá la expresión:

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

1.4.2. Oscilaciones de un péndulo.

Un péndulo que oscila alrededor de una posición de equilibrio puede considerarse, como aproximación, que describe un MAS, a condición de que las oscilaciones sean de pequeña amplitud (el ángulo de separación del hilo del péndulo respecto a la vertical debe ser pequeño). En estas condiciones, y teniendo en cuenta el siguiente diagrama de fuerzas:

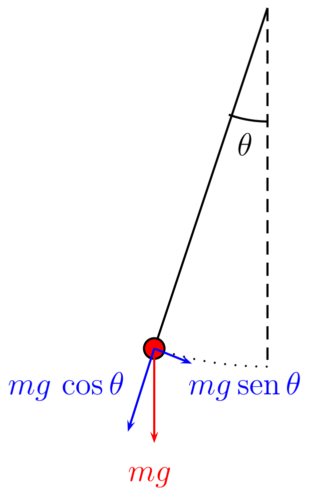

Figura 3: Diagrama de fuerzas para un péndulo simple

considerando además que $mg\,\mathrm{sen}\theta$ es una fuerza recuperadora, es decir, tiende a devolver la masa del péndulo a su posición de equilibrio, podemos plantear la siguiente ecuación para el movimiento del péndulo:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + mg\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

Si tenemos en cuenta que las oscilaciones son pequeñas, podremos utilizar la aproximación $\mathrm{sen}\ \theta \simeq \theta$, con lo cual, tendremos:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + mg\,\theta = 0$$

Considerando además que $\theta = x/L$, donde L es la longitud del péndulo y x el arco descrito por la masa (para oscilaciones pequeñas, el arco puede considerarse como un segmento), podemos poner:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + mg\,\frac{x}{L} = 0$$

La soluciones a esta ecuación diferencial son del mismo tipo que las consideradas en el caso de un resorte. Por semejanza con la anterior deducción, podremos escribir:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

De donde pueden deducirse las expresiones para el periodo y la frecuencia de oscilación del péndulo:

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

1.5. Energía del movimiento armónico simple.

La energía mecánica de un oscilador es la suma de sus energía cinética y potencial. Será necesario, en primer lugar, obtener la expresión de la energía potencial para dicho oscilador. Para ello, sabiendo que la fuerza recuperadora para un resorte que experimenta una deformación,x, es F = -kx, por aplicación de la ley de Hooke, y teniendo en cuenta que el trabajo viene dado por

$$W = \int_0^x -kxdx = 0 - \frac{kx^2}{2} = U_0 - U$$

Al ser conservativa la fuerza recuperadora, el trabajo realizado por dicha fuerza es igual al incremento negativo de la energía potencial. Comparando esta expresión con la obtenida anteriormente, podremos concluir que la energía potencial de un resorte que se ha deformado una longitud x es U= -$\frac{kx^2}{2}$.

La suma de las energías cinética y potencial para un oscilador será, pues:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{kx^2}{2}$$

Si sustituimos los valores de x y de v por los obtenidos con anterioridad, $x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$ y $v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$, tendremos:

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{kA^2\text{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$$

Si, por otra parte, consideramos que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, al sustituir nos quedará:

$$E = \frac{1}{2}\,kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{kA^2\text{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{1}{2}\,kA^2\left[\text{sen}^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right]$$

Si tenemos en cuenta la identidad trigonométrica $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, nos quedará:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\,kA^2}$$

Basándonos en esta expresión, podremos obtener fácilmente la energía cinética de un oscilador, sin más que tener en cuenta que la suma de energía cinética y potencial es igual a la expresión anterior, por lo que, despejando:

$$E_c = E - U = \frac{1}{2}KA^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

En la siguiente imagen, podemos ver la captura de pantalla de una simulación en que se representa la oscilación de un resorte y la representación gráfica de sus energías cinética y potencial.

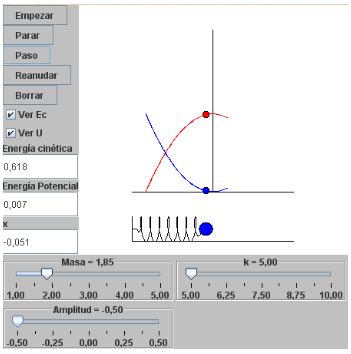

Figura 4: Energías cinética y potencial