PRUEBAS EBAU FÍSICA

Juan P. Campillo Nicolás

9 de julio de 2018

1. Gravitación.

1. Un asteroide de forma esférica y radio 3 km tiene una densidad de 3 g·cm^{-3}. Determine: a) La velocidad de escape desde la superficie de dicho asteroide. b) La velocidad de un cuerpo a una altura de 1 km sobre la superficie del asteroide si partió de su superficie a la velocidad de escape. Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}

   Respuesta:

   a) En el S.I, la densidad tendrá un valor de 3000 kg/m^3.La velocidad de escape viene dada por:

   $$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4/3 \cdot \pi r^3 3000}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4\pi r^2 3000}{3}} = 3,88\, m/s$$

   b) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

   $$-\frac{GMm}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

   $$-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} 4/3\pi 3000^3 \cdot 3000}{3000} + \frac{1}{2}3,88^2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} 4/3\pi 3000^3 \cdot 3000}{4000} + \frac{1}{2}v^2$$

   Obteniéndose **v = 3,36 m/s**.

2. Una reciente investigación ha descubierto un planeta similar a la Tierra orbitando alrededor de la estrella Próxima Centauri, una enana roja cuya masa es un 12 % de la masa del Sol y su radio es el 14 % del radio solar. Mediante técnicas de desplazamiento Doppler se ha medido el periodo del planeta alrededor de la estrella obteniéndose un valor de 11,2 días. Determine: a) La aceleración de la gravedad sobre la superficie de la estrella. b) El radio de la órbita del planeta suponiendo ésta circular. Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11}Nm^{2}kg^{-2}; Masa del Sol, M_S = 1,99·10^{30} kg; Radio del Sol, R_S = 7·10^8 m.

   Respuesta:

   a) La aceleración de la gravedad en la superficie de la estrella es:

   $$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,12 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{(0,14 \cdot 7 \cdot 10^8)^2} = 1658,47\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

   b) Aplicando la tercera ley de Kepler, tendremos:

   $$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \qquad \text{de donde se deduce :} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

   Sustituyendo valores:

   $$\sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,12 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}(11,2 \cdot 86400)^2}{4\pi^2}} = 7,23 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$$

3. Se desea situar un satélite de 120 kg de masa en una órbita circular, alrededor de la Tierra, a 150 km de altura. a) Determine la velocidad inicial mínima requerida para que alcance dicha altura. b) Una vez alcanzada dicha altura, calcule la energía adicional necesaria para que orbite. Datos: Radio de la Tierra, R_T = 6,37·10^6 m; Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = 5,97·10^{24} kg.

   Respuesta:

   a) La velocidad necesaria se halla aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

   $$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_T} = -\frac{GMm}{r}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}}{6,37\cdot10^6} = -\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}}{(6,37\cdot10^6+1,5\cdot10^5)} \qquad v = 1698\,m\cdot s^{,1}$$

b) La energía del satélite en órbita será:

$$\mathrm{E} = -\frac{\mathrm{GMm}}{2\mathrm{r}} = -\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot120}{2\,(6,37\cdot10^6+1,5\cdot10^5)} = -3,66\cdot10^9\,\mathrm{J}$$

Puesto que la energía potencial a esa altura es:

$$\mathrm{U} = -\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{r}} = -\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot120}{(6,37\cdot10^6+1,5\cdot10^5)} - 7,33\cdot10^9\mathrm{J}$$

la energía que debe suministrarse es:

$$\mathrm{E_s} = \mathrm{E} - \mathrm{U} = 3,66\cdot10^9\,\mathrm{J}$$

4. Considérese una masa M = 50 kg situada en el origen de coordenadas. Bajo la acción del campo gravitatorio creado por dicha masa, determine: a) El trabajo requerido para mover una masa m_1 = 2 kg desde P_1 = (1, 0, 0) m a P_2 = (3, 4, 0) m. b) La energía cinética de una partícula de masa m_2 = 3 kg que, partiendo del reposo, se mueve desde el punto P_3 = (9/2, 6, 0) m al punto P_2. Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Respuesta:

a) El trabajo requerido es:

$$\mathrm{W} = -\Delta\mathrm{U} = \mathrm{m}\left(-\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r_1}} + \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r_1}}\right) = 2\left(-\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot50}{1} + \frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot50}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) = -5,34\cdot10^{-9}\mathrm{J}$$

Al ser negativo el trabajo, éste deberá ser realizado por una fuerza externa, y no por el campo gravitatorio.

b) El trabajo realizado sobre la partícula se igualará al incremento de su energía cinética, es decir:

$$\mathrm{W} = -\Delta\mathrm{U} = \Delta\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 - 0$$

Las respectivas energías potenciales en los puntos P_3 y P_2 serán:

$$\mathrm{U_3} = -\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot50\cdot3}{\sqrt{(9/2)^2+6^2}} = -1,334\cdot10^{-9}\mathrm{J} \qquad \mathrm{U_2} = -\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot50\cdot3}{\sqrt{3^2+4^2}} = -2,001\cdot10^{-9}\mathrm{J}$$

$$\mathrm{E_C} = -1,334\cdot10^{-9} + 2,001\cdot10^{-9} = 6,67\cdot10^{-10}\mathrm{J}$$

5. a) Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, obtenga una expresión para la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de radio R y masa M. b) Calcule la velocidad de escape desde la superficie de Mercurio sabiendo que posee una masa de $3{,}30\cdot10^{23}$ kg y una aceleración de la gravedad en su superficie de 3,70 $m\cdot s^{-2}$. Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Respuesta:

a) La suma de energías cinética y potencial en la superficie del planeta es igual a la suma de dichas energías a una distancia infinita. Su suponemos que se alcanza esta distancia con una velocidad nula, tendremos:

$$-\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{R}} + \frac{1}{2}\mathrm{mv_e^2} = 0 \qquad \text{de donde se deduce}: v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

b) Para calcular la velocidad de escape de Mercurio, debemos conocer su radio, a partir de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta:

$$3,70 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,30 \cdot 10^{23}}{r^2} \quad \text{obteniéndose :} \quad \mathrm{r} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,30 \cdot 10^{23}}{3,70}} = 2,44 \cdot 10^6 \,\mathrm{m}$$

Con este dato:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,30 \cdot 10^{23}}{2,44 \cdot 10^6}} = 4247,6 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

6. a) A partir de la ley fundamental de la dinámica, deduzca la expresión de la velocidad orbital de un satélite que gira en una órbita circular de radio R alrededor de un planeta de masa M. b) Si un satélite de 21 kg gira alrededor del planeta Marte, calcule el radio de la órbita circular y la energía mecánica del satélite si su periodo es igual al de rotación del planeta. Datos: Masa de Marte, M_{Marte} = 6,42·10^{23} kg; Periodo de revolución del planeta, T_{Marte} = 24,62 h; Constante de Gravitación Universal, G =6,67·10^{-11}N · m^{2}kg^{-2} .

Respuesta:

a) A partir del 2º Principio de la Dinámica, podremos escribir:

$$\mathrm{F = ma} \longrightarrow \frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{R^2}} = \mathrm{m}\,\frac{\mathrm{v^2}}{\mathrm{R}} \qquad \text{de donde se deduce : } \mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}}}$$

b) El periodo de Marte es: T = 24,62· 3600 = 88632 s. Aplicando la Tercera Ley de Kepler:

$$\mathrm{T^2} = \frac{4\pi^2 \mathrm{r}^3}{\mathrm{GM}} \qquad \mathrm{r} = \sqrt[3]{\frac{88623^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{4\pi^2}} = 2,04 \cdot 10^7 \,\mathrm{m}$$

la energía mecánica del satélite será:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 21}{2 \cdot 2,04 \cdot 10^7} = 2,204 \cdot 10^7 \,\mathrm{J}$$

7. Dos masas m_1 = 10 kg y m_2 = 20 kg cuelgan del techo y están separadas 1 m de distancia. Determine: a) La fuerza $\overrightarrow{F_{12}}$ que ejerce la masa m_1 sobre la m_2, y el peso$\overrightarrow{P_2}$ de la masa m_2. b) Explique razonadamente por qué el módulo de $\overrightarrow{P_2}$ es mucho mayor que el módulo de $\overrightarrow{F_{12}}$. Datos: radio de la tierra R_T = 6,37·10^6 m; constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; masa de la Tierra, M_T = 5,97·10^{24} kg..

Respuesta:

a) Suponiendo ambas masas en el plano XY, tendremos que:

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\frac{\mathrm{Gm^2}}{\mathrm{r^2}} = -\frac{6,67{\cdot}10^{-11} \cdot 10^2}{1^2}\,\vec{i} = -6,67{\cdot}10^{-9}\,\vec{i}\,\mathrm{N} \quad \text{(suponiendo la masa 2 a la derecha)}$$

El peso $\overrightarrow{\mathrm{P_2}}$ será:

$$\overrightarrow{P_2} = -\frac{6,67{\cdot}10^{-11} \cdot 5,97{\cdot}10^{24} \cdot 10}{(6,37 \cdot 10^6)^2}\,\vec{j} = -98,13\,\vec{j}\,\mathrm{N}$$

b) La masa de la Tierra es muy superior a la masa de 10 kg y el cociente: $\frac{\mathrm{M_t}}{\mathrm{R_T^2}} \gg \frac{10}{1^2}$

8. Considérese un satélite de masa 10^3 kg que orbita alrededor de la Tierra en una órbita circular geoestacionaria. a) Determine el radio que tendría que tener la órbita para que su periodo fuese doble del anterior. b) ¿Cuál es la diferencia de energía del satélite entre la primera y la segunda órbita? Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2};Masa de la Tierra, M_T = 5,97·10^{24} kg.

Respuesta:

a) El periodo será el doble del día terrestre, por lo cual:

$$2 \cdot 86400 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} \qquad r = 6,7 \cdot 10^7 \mathrm{m}$$

Para calcular la energía del satélite en órbita geoestacionaria, debemos conocer el radio de ésta:

$$86400 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_g^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} \qquad r_g = 4,22 \cdot 10^7 \mathrm{m}$$

b) Las energías del satélite en órbita geoestacionaria y en órbita de periodo doble serán, respectivamente::

$$E_1 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 10^3}{2 \cdot 4,22 \cdot 10^7 \mathrm{m}} = -4,72 \cdot 10^9 \mathrm{J}$$

$$E_2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 10^3}{2 \cdot 6,7 \cdot 10^7 \mathrm{m}} = -2,97 \cdot 10^9 \mathrm{J}$$

9. Una nave espacial transporta colonos en estado de hibernación a un planeta lejano. Por un error, la nave llega a su destino 10 años terrestres antes de lo previsto, por lo que el ordenador de a bordo decide situar la nave en una órbita circular a una distancia del centro del planeta r = 5000 km y orbitar en ella durante 10 años. a) Cuantas vueltas da la nave en la órbita circular a lo largo de los 10 años? b) Cual es el valor de la velocidad de escape en la superficie del planeta? Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; Masa del planeta, M_P = $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg; Radio del planeta, R_P = 3397,5 km.

Respuesta:

a) El radio de la órbita será:

$$r_o = 5 \cdot 10^6 + 3,3975 \cdot 10^6 = 8,3975 \cdot 10^6 \, \mathrm{m}$$

El periodo de la nave será:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (8,3975 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}} = 23365,5 \, \mathrm{s}$$

El número de vueltas en diez años será:

$$n = \frac{10 \cdot 365 \cdot 86400}{22365,5} = 13497 \, \text{vueltas}$$

b) La velocidad de escape será:

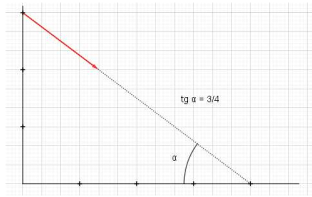
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{3,3975 \cdot 10^6}} = 5020,7 \, \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

10. Una masa de valor M = 4 kg se encuentra en el punto (4, 0) del plano xy (coordenadas expresadas en metros). Determine: a) El vector campo gravitatorio creado por la masa en el punto P (0, 3). b) El trabajo necesario para llevar una masa m = 10 kg desde el origen de coordenadas al punto P. Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Respuesta:

a) A partir de la representación gráfica que puede verse a continuación, el campo gravitatorio creado en el punto (0,3) es el siguiente:

$$\vec{g} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4}{3^2 + 4^2} \left(-\cos 36,87 \, \vec{i} + \operatorname{sen} 36,87 \, \vec{j} \right) = -4,27 \cdot 10^{-11} \vec{i} + 3,20 \cdot 10^{-11} \vec{j} \, \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$



b) El trabajo necesario será: $W = m\,(V_{g0} - V_{g1})$

$$W = m\,(V_{g0} - V_{g1}) = 10\left(-\frac{6,67{\cdot}10^{-11}\cdot 4}{4} + \frac{6,67{\cdot}10^{-11}\cdot 4}{5}\right) = -1,33\cdot 10^{-10}\,J$$

El signo negativo del trabajo indica que este debe ser realizado en contra del campo gravitatorio.

11. La masa de un objeto en la superficie terrestre es de 50 kg. Determine: a) La masa y el peso del objeto en la superficie de Mercurio. b) A qué altura sobre la superficie de Mercurio el peso del objeto se reduce a la tercera parte. Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67{\cdot}10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de Mercurio, M_M = $3{,}30.10^{23}$ kg; Radio de Mercurio, R_M = $2{,}44{\cdot}10^6$ m.

Respuesta:

a) La masa es constante, independientemente del lugar en que se encuentre el cuerpo. El peso en la superficie de Mercurio es:

$$P_M = \frac{6,67{\cdot}10^{-11}\cdot 3,30.10^{23}\cdot 50}{(2,44{\cdot}10^{6})^2} = 184,85\,N$$

b) El peso será una tercera parte del anterior a una distancia r del centro de Mercurio, tal que se cumpla:

$$\frac{184,85}{3} = \frac{6,67{\cdot}10^{-11}\cdot 3,30.10^{23}\cdot 50}{r^2} \qquad r = 4,23\cdot 10^{6}\,m$$

Con lo que la altura respecto a la superficie del planeta será:

$$h = 4,23\cdot 10^{6} - 2,44{\cdot}10^{6} = 1,79\cdot 10^{6}\,m$$

12. Un satélite artificial de masa 712 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 694 km. Calcule: a) La velocidad y el periodo del satélite en la órbita. b) La energía necesaria para trasladarlo desde su órbita hasta otra órbita circular situada a una altura de 1000 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67{\cdot}10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = $5{,}97.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, R_T = $6{,}37{\cdot}10^6$ m.

Respuesta:

a) La velocidad orbital será:

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67{\cdot}10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{6,37\cdot 10^{6} + 6,94\cdot 10^{5}}} = 7516,4\,m\cdot s^{-1}$$

Y el periodo:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(6,37\cdot 10^{6} + 6,94\cdot 10^{5})^3}{6,67{\cdot}10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}} = 5902\,s$$

b) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot 712}{2\,(6,37\cdot 10^{6} + 1,5\cdot 10^{5})} + E = -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\cdot 712}{2\,(6,37\cdot 10^{6} + 10^{6})}$$

$$E = 8,46\cdot 10^{8}\,J$$

2. Vibraciones y ondas.

1. Un gallo canta generando una onda sonora esférica de 1 mW de potencia. a) ¿Cuál es el nivel de intensidad sonora del canto del gallo a una distancia de 10 m? b) Un segundo gallo canta simultáneamente con una potencia de 2 mW a una distancia de 30 m del primer gallo. ¿Cuál será la intensidad del sonido resultante en el punto medio del segmento que une ambos gallos? Dato: Intensidad umbral de audición, I0 = 10^{-12} W m^{-2}.

Respuesta:

a) La intensidad del canto a 10 m de distancia será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{10^{-3}}{4\pi 10^2} = 7,95 \cdot 10^{-7} \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

El nivel de intensidad sonora será:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{7,95 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 59\,\mathrm{dB}$$

b) En el punto medio del segmento que une ambos gallos, la intensidad sonora será la suma de las intensidades del canto de cada uno de ellos, es decir:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{10^{-3}}{4\pi 15^2} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi 15^2} = 1,06 \cdot 10^{-6} \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

2. Una onda armónica transversal se propaga en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 10 m s^{-1} y con una frecuencia angular de $\pi/3$ rad s^{-1}. Si en el instante inicial la elongación en el origen de coordenadas es $6/\pi$ cm y la velocidad de oscilación es 1 cm s^{-1}, determine: a) La expresión matemática que representa la onda. b) La velocidad de oscilación en el instante inicial en el punto situado en x = $\pi/4$.

Respuesta:

a) La ecuación de la onda será del tipo:

$$y = Asen(\omega t + Kx + \varphi_0)$$

(el signo + delante de Kx se debe a que la onda se propaga de derecha a izquierda).
Con los datos suministrados en el enunciado, podremos poner:

$$\omega = \pi/3\,\mathrm{s^{-1}} \quad K = \frac{\omega}{v} = \frac{\pi/3}{10} = \frac{\pi}{30}\,\mathrm{m^{-1}}$$

La velocidad de vibración será:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + Kx + \varphi_0)$$

Para x = 0 y t = 0 se cumple que:

$$y = \frac{6}{\pi} = A\,\mathrm{sen}\varphi_0$$

$$v = 10^{-2} = A\,\frac{\pi}{3}\,\cos\varphi_0$$

Dividiendo miembro a miembro nos queda:

$$\frac{600}{\pi} = \frac{3\,\mathrm{tg}\varphi_0}{\pi} \longrightarrow \mathrm{tg}\,\varphi_0 = 200 \longrightarrow \varphi_0 = 1,566\,\mathrm{rad}$$

para calcular la amplitud:

$$\frac{6}{\pi} = A\,\mathrm{sen}\,1,566 \longrightarrow \mathrm{A} = 1,91\,\mathrm{m}$$

Así pues, la ecuación de la onda tendrá la forma:

$$y = 1,91\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{30}x + 1,566\right)$$

b) Para t = 0 y x = $\frac{\pi}{4}$, la velocidad de vibración será:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos\left(\omega t + Kx + \varphi_0\right) = 1,91\,\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{30}\frac{\pi}{4} + 1,566\right) = -0,15\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3. Una onda armónica transversal de amplitud A = 0,2 m, longitud de onda λ = 0,1 m y frecuencia f = 15 kHz se propaga en el sentido positivo del eje X. En el origen, x = 0, y en el instante inicial, t = 0, la velocidad de oscilación es máxima con sentido negativo. Determine: a) La expresión matemática de la onda. b) La elongación del punto x = 0,3 m en el instante t = 2 s.

Respuesta:

a) La expresión matemática es de la forma:

$$\text{y} = \text{A}\,\text{sen}\left(\omega\text{t} - \text{kx} + \varphi_0\right)$$

Los valores que proporciona el enunciado son: A = 0,2 m; $\omega = 2\pi$ f = 30000π s^{-1}; k = $2\pi/\lambda = 20\pi$ m^{-1}

La velocidad de oscilación tiene la expresión:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\,\omega\,cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)$$

sabiendo que para x = 0 y t = 0, la velocidad es máxima, y de signo negativo, podremos escribir:

$$v = A\omega\cos\varphi_0 = -A\omega \rightarrow cos\,\varphi = -1\text{y}\ \varphi_0 = \pi\,rad$$

Con estos datos, la ecuación de la onda quedará de la forma:

$$y = 0,2\,\text{sen}\left(30000\pi\text{t} - 20\pi\text{x} + \pi\right)$$

b) para x = 0,3 y t = 2, la elongación es:

$$y = 0,2\,\text{sen}\left(60000\pi - 6\pi + \pi\right) = 0\,\text{m}$$

4. Para determinar la profundidad de una cueva se emite una onda sonora esférica de 10 W y se observa que al cabo de 3 s se escucha el eco. Admitiendo que la cueva es suficientemente amplia para despreciar las reflexiones en las paredes laterales, determine, despreciando los efectos de la absorción: a) La profundidad de la cueva. b) La intensidad de la onda sonora al llegar al fondo de la cueva. Dato: Velocidad del sonido en el aire, v = 340 m s^{-1}.

Respuesta:

a) La profundidad de la cueva es d = 340·3/2 = 510 m. (El tiempo invertido por el sonido en el camino de ida o de vuelta es 3/2 = 1,5 s)

b) La intensidad es:

$$\text{I} = \frac{\text{P}}{\text{S}} = \frac{10}{4\pi 510^2} = 3,06\cdot 10^{-6}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$$

5. La perturbación asociada a una onda viene descrita por la expresión($\psi(x,t) = 10^{-4}$ sen (2765 t + 1,85 x), donde ψ y x se expresan en metros y t en segundos. a) Indique su dirección y sentido de propagación, y calcule su longitud de onda y su frecuencia. b) Obtenga la velocidad de propagación de la onda y la velocidad máxima de oscilación.

Respuesta:

a) La onda se propaga en el sentido negativo del eje X, tal como indica el signo + en el sumando 1,85 x. La longitud de onda y la frecuencia se calcularán, respectivamente, así:

$$k = 1,85 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{2\pi}{1,85} = 3,4\,\mathrm{m}$$

$$\omega = 2675 = 2\pi\nu \quad \nu = \frac{2675}{2\pi} = 425,7\,\mathrm{Hz}$$

b) la velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \lambda \cdot \nu = 3,4 \cdot 425,7 = 1447,4 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

Mientras que la velocidad de oscilación es:

$$v_t = \frac{d\psi}{dt} = 10^{-4} \cdot 2675 \cos(2675\mathrm{t} + 1,85\mathrm{x})$$

Siendo la velocidad máxima:

$$v_{máx} = 10^{-4} \cdot 2675 = 0,27\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

6. Una fuente puntual de 3 μW emite una onda sonora. a) ¿Qué magnitud física "oscila" en una onda de sonido? ¿Es una onda longitudinal o transversal? b) Calcule la intensidad sonora y el nivel de intensidad sonora a 5 m de la fuente. Determine a qué distancia del foco emisor se debe situar un observador para dejar de percibir dicho sonido. Dato: Intensidad umbral de audición, $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}$W m^{-2}.

Respuesta:

a) Una onda sonora está formada por zonas alternadas de compresión y rarefacción del aire, por lo que la magnitud física a la que se refiere el enunciado es la presión. Es sonido es una onda longitudinal.

b) La intensidad sonora es:

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 5^2} = 9{,}55 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$$

$$\beta = 10 \log \frac{9,55 \cdot 10^{-9}}{10^{-12}} = 39,8\,\mathrm{dB}$$

El sonido dejará de percibirse a una distancia para la cual $\mathrm{I} = 10^{-12}$ W· m^{-2}, es decir:

$$10^{-12} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{4\pi r^2} \quad \text{Despejando : r} = 488,6\,\mathrm{m}$$

7. Dos altavoces de 60 W y 40 W de potencia están situados , respectivamente, en los puntos (0,0,0) y (4, 0, 0) m. Determine: · a) El nivel de intensidad sonora en el punto (4, 3, 0) m debido a cada uno de los altavoces. b) El nivel de intensidad sonora en el punto (4, 3, 0) m debido a ambos altavoces . Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Respuesta:

a) La intensidad sonora para cada uno de los altavoces, independientemente será:

$$\mathrm{I}_1 = \frac{60}{4\pi \cdot 25} = 0,191\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \qquad \mathrm{I}_2 = \frac{60}{4\pi \cdot 9} = 0,354\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$$

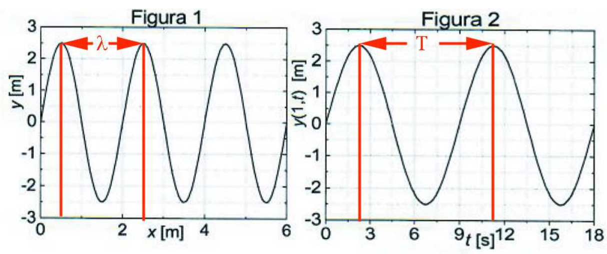
Los respectivos niveles de intensidad serán:

$$\beta_1 = 10 \log \frac{0,191}{10^{-12}} = 112,1\,\text{dB} \qquad \beta_2 = 10 \log \frac{0,354}{10^{-12}} = 115,4\,\text{dB}$$

b) El nivel de intensidad debido a los dos altavoces de forma simultánea será:

$$\beta = \beta_1 = 10 \log \frac{0,191 + 0,354}{10^{-12}} = 117,36\,\text{dB}$$

8. Considérese una onda armónica transversal que se propaga en el sentido positivo del eje x. La figura 1 muestra la variación de la elongación en función de x en un instante t, mientras que en la figura 2, se representa la oscilación, en función del tiempo, de un punto situado en x = 1 m. Determine: a) La longitud de onda, la amplitud, el periodo y la velocidad de propagación de la onda. b) La expresión matemática de la onda.



Respuesta:

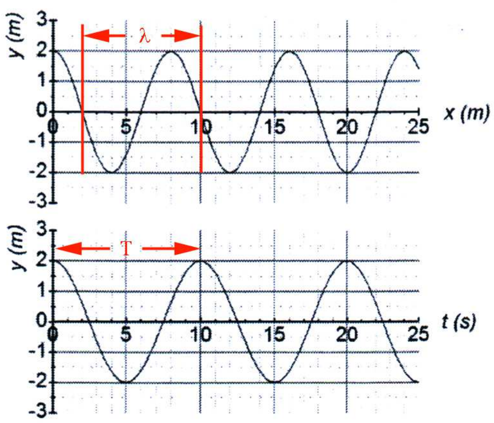
a) La longitud de onda es: $\lambda = 2,5 - 0,5 = 2\,\text{m}$; la amplitud es $\text{A} = 2{,}5\,\text{m}$; el periodo es: $\text{T} = 11 - 2 = 9\,\text{s}$. La velocidad de propagación es:

$$\text{v} = \frac{\lambda}{\text{T}} = \frac{2}{9}\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Teniendo en cuenta que: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{9}$, que $\text{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{2}$ y que y (0,0) = 0, m, la expresión matemática de la onda es:

$$\text{y} = 2,5\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\,\text{t} - \pi\,\text{x}\right)$$

9. Una onda transversal se propaga en el sentido positivo del eje x. En las figuras se muestran: la variación de la elongación en un instante t = 0 a lo largo del eje x y la elongación del punto de coordenada x = 0 en función del tiempo. Determine: a) La longitud de onda y la frecuencia. b) La expresión matemática de la onda.



Respuesta:

a) La longitud de onda es: $\lambda = 10 - 2 = 8\,\mathrm{m}$; ; el periodo es: $T = 10 - 0 = 10\,\mathrm{s}$, con lo que la frecuencia será: $\nu = 1/10 = 0,1\,\mathrm{s^{-1}}$

b) Teniendo en cuenta que al ser y (0,0) = 2 m, tendremos que:

$$2 = 2\,\mathrm{sen}\,\varphi_0 \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

La expresión matemática de la onda es:

$$y(x,t) = 2\,\mathrm{sen}\left(0,2\pi t - \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

10. Dos altavoces A y B emiten ondas sonoras con potencias P_A y $P_B = 3P_A$, respectivamente. En un punto Q situado a una distancia d = 5 m, equidistante de ambos altavoces, el nivel de intensidad sonora es de 90 dB. Determine: a) La intensidad sonora en Q. b) La potencia del altavoz A Dato: Intensidad umbral , $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

Respuesta:

a) Conociendo el nivel de intensidad sonora en el punto Q, podremos escribir:

$$90 = 10\log\frac{I}{10^{-12}} \qquad I = 10^{-3}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

b) La intensidad debida a los altavoces en el punto Q será:

$$I = 10^{-3} = \frac{4\,P_A}{4\pi\cdot 25} \qquad P = 0,078\,\mathrm{W}$$

11. El nivel de intensidad sonora de la sirena de un barco es de 80 dB a 10 m de distancia. Suponiendo que la sirena es un foco emisor puntual, calcule: a) La potencia de la sirena y la intensidad de la onda sonora a 1 km de distancia. b) Las distancias, medidas desde la posición de la sirena, donde se alcanza un nivel de intensidad sonora de 70 dB (considerado como límite de contaminación acústica) y donde el sonido deja de ser audible. Dato: Intensidad umbral de audición, I0 = 10^{-12} W m^{-2}.

Respuesta:

a)Para un nivel de intensidad de 80 dB, tendremos:

$$80 = 10\log\frac{I}{10^{-12}} \qquad I = 10^{-4}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

Para calcular la potencia de la sirena:

$$I = \frac{P}{S} \qquad 10^{-4} = \frac{P}{4\pi 10^2} \qquad P = 0,126\,\mathrm{W}$$

A 1 km de distancia, la intensidad de la onda tendrá el valor:

$$I = \frac{0,126}{4\pi\cdot 10^6} = 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

b) Para un nivel de intensidad de 70 dB:

$$70 = 10\log\frac{I}{10^{-12}} \qquad I = 10^{-5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

$$10^{-5} = \frac{0,126}{4\pi r_1^2} \qquad r_1 = 31,67\,\mathrm{m}$$

Para que el sonido deje de ser audible:

$$I = 10^{-12} = \frac{0,126}{4\pi r_2^2} \qquad r_2 = 10^5\,\mathrm{m}$$

12. Una onda armónica transversal de periodo $T = 4$ s, se propaga en el sentido positivo del eje x por una cuerda de gran longitud. En el instante $t = 0$ la expresión matemática que proporciona la elongación de cualquier punto de la cuerda es: $Y(x, 0) = 0,2\,\mathrm{sen}\left(-4\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$ donde x e Y están expresadas en metros. Determine: a) La amplitud, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda. b) La velocidad y la aceleración de oscilación de un punto de la cuerda de abscisa $x = 0{,}40$ m en el instante $t = 8$ s.

Respuesta:

a) Los parámetros pedidos son:

$$A = 0,2\mathrm{m} \quad \nu = \frac{1}{T} = 0,25\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi \longrightarrow \lambda = 0,5\,\mathrm{m} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,5}{4} = 0,125\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

b) La ecuación de la onda tendrá la forma: $y = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t - kx + \varphi_0) = 0,2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t - 4\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$. las expresiones de velocidad y aceleración serán, respectivamente:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,2\cdot\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - 4\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -0,2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t - 4\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Sustituyendo x y por 0,4 y 8, respectivamente:

$$v = -0,21\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad a = -1,47\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

3. Óptica.

1. Un objeto está situado 1 cm a la izquierda de una lente convergente de 2 cm de distancia focal. a) Determine la posición de la imagen y el aumento lateral. b) Realice el diagrama de rayos correspondiente.**Respuesta:**

   a) A partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

   $$\frac{1}{\mathrm{s}} - \frac{1}{\mathrm{s}'} = (1-\mathrm{n})\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) = -\frac{1}{\mathrm{f}'}$$

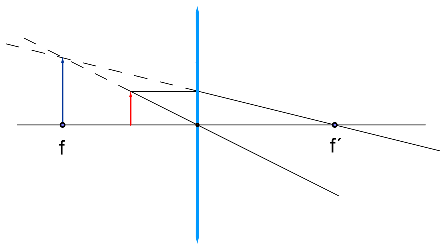
   Puesto que la distancia focal es de 2 cm, $f' = 0,02$,por lo que:

   $$\frac{1}{-0,01'} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{0,02}$$

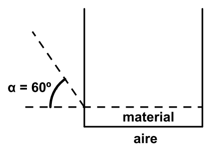
   Resolviendo la ecuación se obtiene: $s' = -0,02$ **m**. El aumento lateral será:

   $$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-0,02}{-0,01} = 2$$

   b) El diagrama de rayos es el siguiente:



2. Sobre un bloque de material cuyo índice de refracción depende de la longitud de onda, incide desde el aire un haz de luz compuesto por longitudes de onda de 400 nm (violeta) y 750 nm (rojo). Los índices de refracción del material para estas longitudes de onda son 1,66 y 1,60, respectivamente. Si, como se muestra en la figura, el ángulo de incidencia es de 60º: a) ¿Cuáles son los ángulos de



   refracción y las longitudes de onda en el material? b) Determine el ángulo límite para cada longitud de onda en la frontera entre el material y el aire. Para $\alpha = 60º$, ¿escapan los rayos desde el medio hacia el aire por la frontera inferior? Dato: Índice de refracción del aire, $\mathrm{n}_{aire} = 1$.

   Respuesta:

   a) Aplicando la Ley de Snell para cada una de las radiaciones:

   $$\frac{\text{sen}\,60º}{\text{sen}\,\alpha_{ri}} = \frac{n_i}{1} \longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\alpha_{r1} = \dfrac{\text{sen}\,60º}{1,66} \longrightarrow \alpha_{r1} = 31,45º\ \text{(luz violeta)} \\ \text{sen}\alpha_{r2} = \dfrac{\text{sen}\,60º}{1,60} \longrightarrow \alpha_{r2} = 32,77º\text{(luz roja)} \end{cases}$$

   Para conocer las longitudes de onda en el material, debemos conocer la frecuencia de ambas radiaciones, que es invariable con el medio en que se propaguen. Estas frecuencias serán:

   $$\nu = \frac{c}{\lambda} \longrightarrow \nu_1 = \frac{3\cdot 10^8}{4\cdot 10^{-7}} = 7,5\cdot 10^{14}s^{-1} \quad \text{y} \quad \nu_2 = \frac{3\cdot 10^8}{7,5\cdot 10^{-7}} = 4\cdot 10^{14}s^{-1}$$

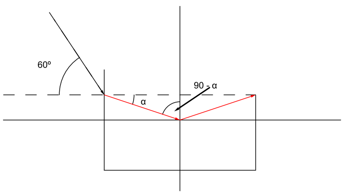
las longitudes de onda en el material serán, pues:

$$\lambda_1 = \frac{3 \cdot 10^8/1,66}{7,5 \cdot 10^{14}} = 2,41 \cdot 10^{-7}\text{m} \qquad \lambda_2 = \frac{3 \cdot 10^8/1,60}{7,5 \cdot 10^{14}} = 4,69 \cdot 10^{-7}\text{m}$$

b) los respectivos ángulos límite se deducen de la Ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha_\text{i}}{\text{sen}\,90^\text{o}} = \frac{1}{n_i} \longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha_1 = \dfrac{1}{1,66} \longrightarrow \alpha_1 = 37,04^\text{o} \\ \text{sen}\,\alpha_2 = \dfrac{1}{1,60} \longrightarrow \alpha_2 = 38,68^\text{o} \end{cases}$$

Como el ángulo límite es menor que el ángulo formado entre el rayo refractado dentro del medio y la normal, los rayos refractados en el interior del medio no escaparán hacia el aire por la frontera inferior.



90 - α > ángulo límite (para ambas radiaciones)

3. En una lente delgada convergente: a)¿Dónde hay que situar un objeto para obtener su imagen a 3 cm de la lente, 2 veces mayor e invertida? ¿Cuánto vale la distancia focal de la lente? b) Trace el diagrama de rayos para un objeto situado a una distancia de la lente menor que su distancia focal.

Respuesta:

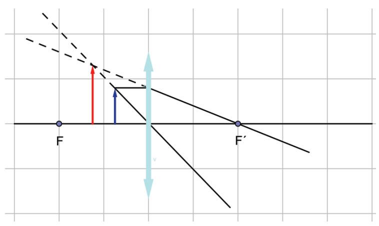
a) De los datos suministrados en el enunciado podemos extraer los siguiente: $\text{s}' = 0,03$ m; $\text{y}' = -2y$. teniendo en cuenta, además, la fórmula del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad \frac{-2y}{y} = -2 = \frac{0,03}{s} \quad s = -0,015\,\text{m}$$

Para calcular la distancia focal, utilizamos la ecuación fundamental de las lentes delgadas::

$$\frac{1}{-0,015} - \frac{1}{0,03} = -\frac{1}{f'} \qquad f' = 0,01\,\text{m}$$

b) El diagrama de rayos para un objeto situado a una distancia de la lente menor que la distancia focal de aquella es el siguiente:



4. Un haz de luz incide desde un medio con índice de refracción $\text{n}_1 = 1{,}8$ sobre la superficie plana de separación con otro medio de índice de refracción $\text{n}_2 = 1{,}5$. Si la longitud de onda en el primer medio es de 500 nm: a) Determine la velocidad de propagación y la frecuencia del haz en ambos medios así como la longitud de onda en el segundo. b) ¿Cuál tendría que ser el ángulo de incidencia para que no hubiera refracción? Dato: Velocidad de propagación de la luz en el vacío, $\text{c} = 3{\cdot}10^8$ m s^{-1}.

Respuesta:

a) la velocidad de propagación en el primero y en el segundos medio son, respectivamente:

$$v_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{1,8} = 1,67 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad v_2 = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

la frecuencia del haz es invariable, por lo que podremos escribir:

$$\nu = \frac{1,67 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = 3,33 \cdot 10^{14}\mathrm{s^{-1}}$$

La longitud de onda en el segundo medio será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2 \cdot 10^8}{3,33 \cdot 10^{14}} = 6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

b) para que no haya refracción deberá cumplirse que:

$$\frac{\mathrm{sen}\,\alpha_1}{\mathrm{sen}\,90^{\circ}} = \frac{\mathrm{n_2}}{\mathrm{n_1}} = \frac{1,5}{1,8} \quad \alpha_1 = 56,44^{\circ}$$

5. Sea una lente convergente de distancia focal de 5 cm. a) Calcule la distancia entre la lente y la imagen formada para un objeto situado en el infinito, y para un objeto situado a 20 cm de la lente. b) Determine el tamaño de un objeto que está situado a 20 cm de la lente y forma una imagen de 30 mm de altura, y realice el diagrama de rayos correspondiente para la formación de la imagen.

Respuesta:

a) para un objeto situado en el infinito:

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{f'} \qquad s' = f' = 0,05\,m$$

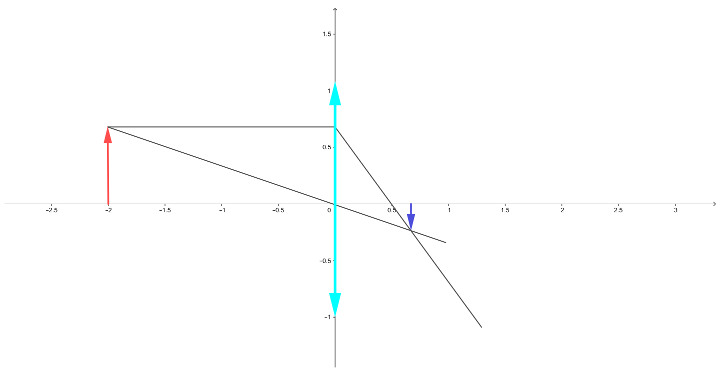
Para un objeto situado a 20 cm de la lente:

$$\frac{1}{-0,2} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{0,06} \qquad s' = 6,67\,\mathrm{cm}$$

b) Aplicando la ecuación del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \qquad \frac{-0,003}{y} = \frac{0,0667}{0,2} \qquad y = 0,009\,\mathrm{m}$$

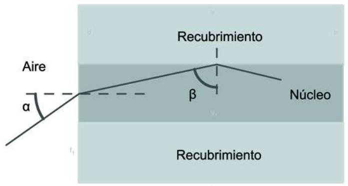
El diagrama de rayos es el siguiente:



6. Una fibra óptica de vidrio posee un núcleo con un índice de refracción de 1,55, rodeado por un recubrimiento de índice de refracción de 1,45. Determine: a) El ángulo mínimo β que debe tener un rayo que viaja por la fibra óptica a partir del cual se produce reflexión total interna entre el núcleo y el recubrimiento. b) El ángulo máximo de entrada α a la fibra para que un rayo viaje confinado en la región del núcleo. Dato: Índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$

Respuesta:

a) La representación gráfica es la siguiente:



Aplicando la Ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\,(90-\beta)}{\text{sen}\,90^{\text{o}}} = \frac{1,45}{1,55} \quad \text{sen}\,(90-\beta) = \cos\beta = 0,935 \quad \beta = 20,77^{\text{o}}$$

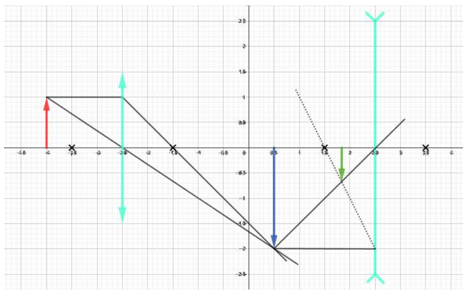
b) Para que el rayo no abandone el núcleo:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,20,77^{\text{o}}} = \frac{1,55}{1,45} \qquad \alpha = 22,27^{\text{o}}$$

7. Un sistema óptico esta constituido por dos lentes situadas a 50 cm de distancia. La primera es de 10 dioptrías y la segunda de -10 dioptrías. Se sitúa un objeto de altura 10 cm a una distancia de 15 cm, a la izquierda de la primera lente. a) Determine la posición y el tamaño de la imagen producida por la primera lente y de la imagen final formada por el sistema. b) Realice un diagrama de rayos de la formación de la imagen final.

Respuesta:

a) El diagrama de rayos es el siguiente:



b) Para la primera lente:

$$\frac{1}{-0,15} - \frac{1}{s'_1} = -10 \qquad \text{obteniéndose;} \quad s'_1 = 0,3\,\text{m}$$

El tamaño de la imagen obtenida con la primera lente será:

$$y'_1 = y\,\frac{s'_1}{s} = 0,1\,\frac{0,3}{-0,15} = -0,2\,\text{m}$$

La distancia objeto para la segunda lente será: $s_2 = -(0,5-0,3) = -0,2$ m. Aplicando nuevamente la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{-0,2} - \frac{1}{s'_2} = 10 \qquad s'_2 = -0,067\,\text{m}$$

Mientras que el tamaño de la imagen será:

$$y_2' = y_1' \frac{s_2'}{s_1'} = -0,2\,\frac{-0,067}{-0,2} = -0,067\,\mathrm{m}$$

8. En un medio de índice de refracción $n_1 = 1$ se propaga un rayo luminoso de frecuencia $f_1 = 6{\cdot}10^{14}$ Hz. a) Cual es su longitud de onda? b) Cual sería la frecuencia y la longitud de onda de la radiación si el indice de refracci6n del media fuese $n_2 = 1{,}25\ n_1$? Dato: Velocidad de propagación de la luz en el vacío, $c = 3{\cdot}\ 10^8\ \mathrm{m}{\cdot}\ \mathrm{s}^{-1}$

Respuesta:

a) La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{3\cdot 10^8}{6\cdot 10^{14}} = 5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

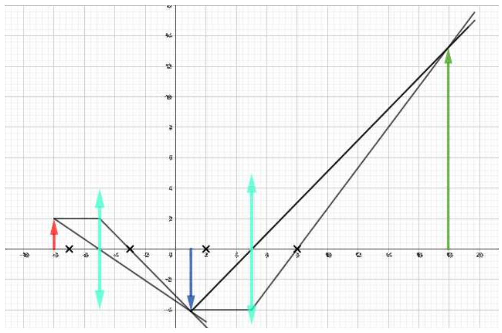
b) La frecuencia de la radiación es la misma, independientemente del medio. La nueva longitud de onda será:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8/1,25}{6\cdot 10^{14}} = 4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

9. Un sistema óptico esta formado por dos lentes convergentes de distancias focales $f_1{}' = 20$ cm y $f_2{}' = 30$ cm. La segunda lente, de distancia focal $f_2{}'$, esta situada a la derecha de la primera a 100 cm de distancia. Un objeto de 3 cm de altura se coloca 30 cm delante de la primera lente. a) Determine la posición y la altura de la imagen del objeto formada por el sistema óptico. b) Realice el diagrama de rayos correspondiente.

Respuesta:

a) El diagrama de rayos es el siguiente:



b) Para la primera lente:

$$\frac{1}{-0,3} - \frac{1}{s_1'} = -\frac{1}{0,2} \qquad \text{obteniéndose;} \quad s_1' = 0,6\,\mathrm{m}$$

El tamaño de la imagen obtenida con la primera lente será:

$$y_1' = y\,\frac{s_1'}{s} = 0,03\,\frac{0,6}{-0,3} = -0,06\,\mathrm{m}$$

La distancia objeto para la segunda lente será: $s_2 = -(1-0,6) = -0,4$ m. Aplicando nuevamente la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{-0,4} - \frac{1}{s_2'} = -\frac{1}{0,3} \qquad s_2' = 1,2\,\mathrm{m}$$

Mientras que el tamaño de la imagen será:

$$y_2' = y_1' \frac{s_2'}{s_1'} = -0,06\,\frac{1,2}{-0,4} = 0,18\,\mathrm{m}$$

10. Un haz de luz de frecuencia 4,29· 10^{14} Hz incide desde un medio 1 de indice de refracción n_1 = 1,50 sobre otro medio 2 de indice de refracci6n n_2 = 1,30. El angulo de incidencia es de 50°. Determine: a) La longitud de onda del haz en el medio 1. b) El angulo de refracción. ¿A partir de que angulo de incidencia se produce la reflexión total del haz incidente? Dato: Velocidad de la luz en el vacío c = 3·10^8 m s^{-1}

Respuesta:

a) La longitud de onda será:

$$\lambda_1 = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8/1,50}{4,29 \cdot 10^{14}} = 4,66 \cdot 10^{-7}\text{m}$$

b) Aplicando la Ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } 50^{\text{o}}}{\text{sen } \alpha_r} = \frac{1,30}{1,50} \qquad \alpha_r = 62,11^{\text{o}}$$

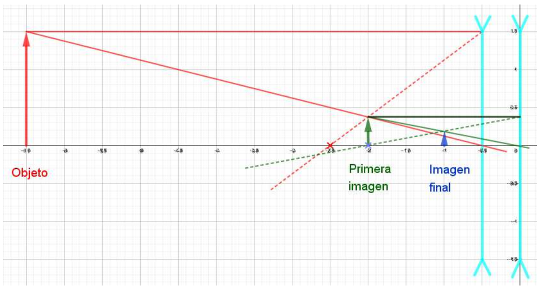
Para que se produzca reflexión interna total, el ángulo límite se calcula a partir de:

$$\frac{\text{sen } \alpha_i}{\text{sen } 90^{\text{o}}} = \frac{1,30}{1,50} \qquad \alpha_i = 60^{\text{o}}$$

11. Un sistema óptico centrado está formado por dos lentes delgadas divergentes de igual distancia focal (f´ = -20 cm) separadas 5 cm. Un objeto luminoso perpendicular al eje óptico, de tamaño y = 2 cm, se sitúa a la izquierda de la primera lente a una distancia de 60 cm. Determine: a) La posición de la imagen formada por la primera lente y realice su construcción geométrica mediante el trazado de rayos. b) La posición y el tamaño de la imagen final dada por el sistema formado por las dos lentes.

Respuesta:

a) El diagrama de rayos, tanto el correspondiente a la imagen de la primera lente como de la imagen final, es el siguiente:



Para calcular la posición y el tamaño de la primera imagen, aplicamos la ecuación fundamental de las lentes y la ecuación del aumento lateral:

$$\frac{1}{-0,6} - \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{0,2} \qquad \text{obteniéndose;} \quad s'_1 = -0,15\,\text{m}$$

Es decir, la primera imagen se forma en el foco de la segunda lente.
El tamaño se calcula así:

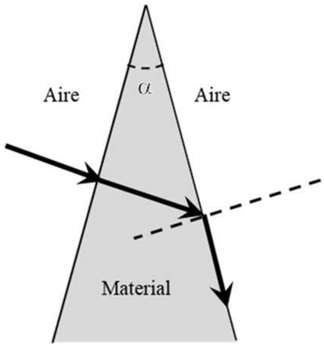
$$y' = y\,\frac{s'}{s} = 2\,\frac{-0,15}{-0,6} = 0,5\,\text{cm}$$

b) Para calcular los datos de la imagen final:

$$\frac{1}{-0,2} - \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{0,2} \qquad \text{obteniéndose;} \quad s'_1 = -0,1\,\text{m}$$

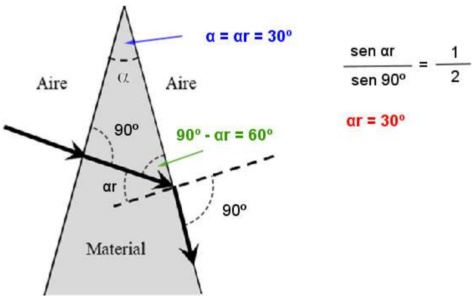
$$y' = y\,\frac{s'}{s} = 0,5\,\frac{-0,1}{-0,2} = 0,25\,\text{cm}$$

12. Un material transparente de índice de refracción n = 2 se encuentra situado en el aire y limitado por dos superficies planas no paralelas que forman un ángulo α Sabiendo que el rayo de luz monocromática que incide perpendicularmente sobre la primera superficie emerge por la segunda con un ángulo de 90º con respecto a la normal, como se muestra en la figura, determine: a) El valor del ángulo límite para la incidencia material-aire y el valor del ángulo b) El ángulo de incidencia de un rayo en la primera superficie para que el ángulo de emergencia por la segunda sea igual que él. Dato: Índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$.

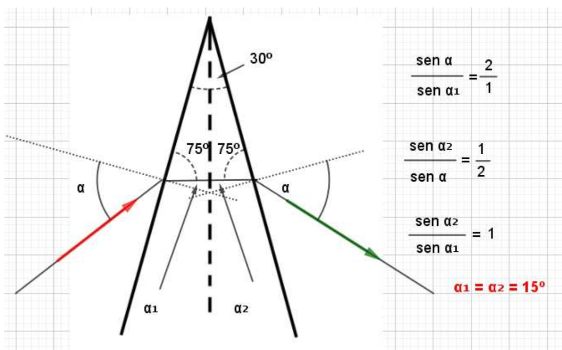


Respuesta:

a) La respuesta a este apartado puede verse en la siguiente imagen:



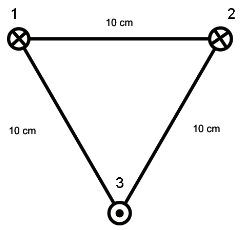
b) La respuesta a este apartado puede verse en la siguiente imagen:



Conocido el valor de α_1 , tendremos: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}15^{\circ}} = \dfrac{2}{1}$ $\qquad \alpha = 31,17^{\circ}$

4. Electromagnetismo.

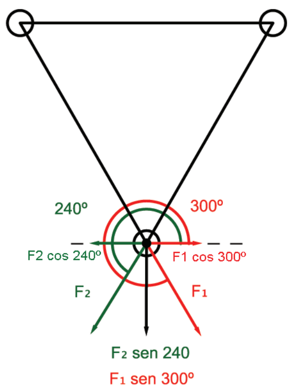
1. Tres conductores rectilíneos, largos y paralelos, que transportan una corriente de 5 A cada uno de ellos, pasan a través de los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado, tal y como se muestra en la figura.



Suponiendo que el origen de coordenadas se encuentra en el conductor 1, determine: a) La fuerza por unidad de longitud sobre el conductor 3 debida a los conductores 1 y 2. b) El campo magnético en el punto medio del segmento que une los conductores 1 y 2. Dato: Permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi{\cdot}10^{-7}$ N A^{-2}.

Respuesta:

a) La corriente, tanto en el conductor 1 como en el 2, tiene sentido contrario a la del conductor 3. Así pues, entre los conductores 1 y 3 y los 2 y 3 aparecen fuerzas de repulsión, tal y como puede verse en la siguiente imagen.



Al tener el mismo valor las intensidades de corriente y ser iguales las distancias, las fuerzas $\overrightarrow{F_1}$ y$\overrightarrow{F_2}$ tendrán el mismo módulo. La fuerza resultante sobre el conductor 3 será, según se deduce de la anterior imagen:

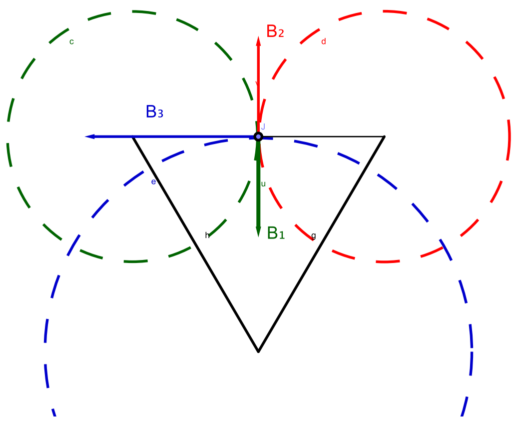
$$F = -\left[\left(\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 5\cdot l}{2\pi\cdot 0,1}\right)\operatorname{sen}300^{\text{o}} + \left(\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 5\cdot l}{2\pi\cdot 0,1}\right)\operatorname{sen}240^{\text{o}}\right]\vec{j} =$$

La fuerza por unidad de longitud sobre el conductor 3 será:

$$\frac{F}{l} = -\left[\left(\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 5}{2\pi\cdot 0,1}\right)\operatorname{sen}300^{\text{o}} + \left(\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 5}{2\pi\cdot 0,1}\right)\operatorname{sen}240^{\text{o}}\right]\vec{j} = -8,66\cdot 10^{-5}\vec{j}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

b) Aplicando la regla de la mano derecha, veremos que el campo magnético en el punto medio del segmento que une los conductores 1 y 2 tiene tres componentes, dos de las cuales se anulan entre sí (las debidas a las corrientes de los conductores 1 y 2).
La tercera componente tendrá el valor:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{i} = -\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5}{2\pi\sqrt{(0,1^2 - 0,05^2)}}\vec{i} = -1,15\cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$$



2. Un protón se desplaza con una velocidad $\vec{v} = 5\,\vec{i}$ m s^{-1} en el seno de un campo eléctrico definido por la expresión $\vec{E} = -100\,\vec{j}$ V m^{-1}. Determine: a) El campo magnético necesario, contenido en el plano YZ, para mantener al protón siguiendo un movimiento rectilíneo y uniforme. b) El radio de giro que tendría dicho protón en una región donde solamente existiera el campo magnético del apartado anterior. Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6·10^{-19} C; Masa del protón, m_p = 1,67·10^{-27} kg.

Respuesta:

a) Para que el protón describa un movimiento rectilíneo y uniforme, la resultante de las fuerzas que actúen sobre él debe ser nula, es decir:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q\,(-100\,\vec{j} + 5\,\vec{i} \times \vec{B}) = 0$$

Si representamos el vector $\vec{B}$ de la forma: $\vec{B} = |\vec{B}|\vec{u}$, donde $\vec{u}$ es un vector unitario en la dirección y sentido de B, tendremos:

$$100 = 5\,|\vec{B}| \longrightarrow |\vec{B}| = 20$$

$$-\vec{j} + \vec{i} \times \vec{u} = 0$$

De forma que $\vec{i} \times \vec{u} = \vec{j}$, con lo que se cumplirá que $\vec{u} = \vec{k}$. Así pues, $\vec{B} = 20\,\vec{k}$. **T**

b) El radio de giro se calcula a partir de la expresión:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad \text{de donde} \quad r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 20} = 2,61 \cdot 10^{-9} m$$

3. En el semiespacio definido por z ≥ 0 existe un campo eléctrico uniforme dado por 5000 $\vec{k}$ N C^{-1}. Determine: a) La diferencia de potencial entre los puntos $P_1(1, 2, 3)$ m y $P_2(2, 4, 3)$ m. b) El trabajo requerido para llevar una carga q = 5 μC, desde el punto $P_2(2, 4, 3)$ m al $P_3(1, 1, 1)$ m.

Respuesta:

a) La diferencia de potencial será:

$$-\Delta V = \vec{E} \cdot \vec{\Delta r} = 5000\,\vec{k}\,[(1-2)\,\vec{i} + (2-4)\,\vec{j} + (3-3)\,\vec{k}] = 0\,\text{V}$$

b) El trabajo necesario será:

$$W = q\,(V_2 - V_3)$$

la diferencia de potencial entre V_2 y V_3 será:

$$V_2 - V_3 = \vec{E}\vec{\Delta r} = 5000\,\vec{k}\,[(2-1)\,\vec{i} + (4-1)\,\vec{j} + (3-1)\,\vec{k}] = 10000\,\text{V}$$

Y el trabajo valdrá:

$$W = q\,(V_2 - V_3) = 0,01\,\mathrm{J}$$

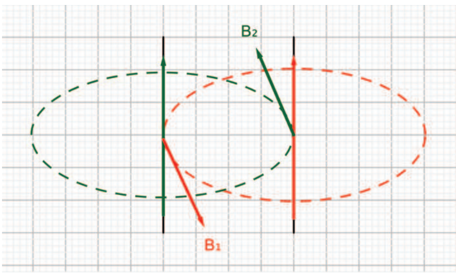
4. Dos hilos indefinidos y paralelos separados una distancia d transportan corrientes de igual intensidad I y en el mismo sentido. Determine: a) El módulo, dirección y sentido de los campos magnéticos que cada uno de los hilos crea en el otro e ilústrelos en una figura. b) La distancia d a la que deben estar los hilos para que la fuerza por unidad de longitud entre ellos sea de 10^{-5} N m^{-1} sabiendo que la intensidad que circula por los hilos es I = 5 A. Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}.

Respuesta:

a) El módulo del campo magnético que cada hilo crea sobre el otro es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

La dirección de cada vector campo magnético es la misma, y el sentido es opuesto, como puede verse en la siguiente imagen:



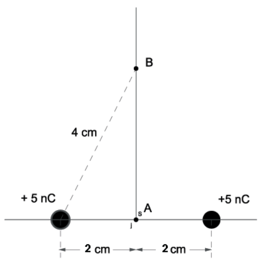
b) la fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{F}{l} = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\right) \qquad 10^{-5} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 5}{2\pi d}$$

De donde, despejando, se obtiene:

$$d = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 5}{2\pi \cdot 10^{-5}} = 0,25\,\mathrm{m}$$

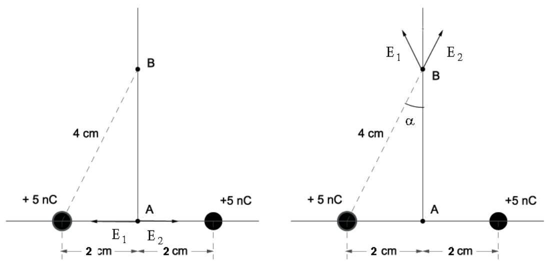
5. Dos cargas de + 5 nC están separadas una distancia de 4 cm de acuerdo a la figura adjunta.



Calcule: a) El campo eléctrico en el punto A y en el punto B creado por ambas cargas. b) El potencial eléctrico en el punto A y en el punto B, y el trabajo que hay que realizar sobre una carga de +3 nC para desplazarla desde el punto A al punto B. Dato: Constante de la Ley de Coulomb, K = $9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Respuesta:

a) El campo eléctrico creado por ambas cargas en los puntos A y B puede deducirse de las siguientes imágenes:



En el punto A, el campo eléctrico creado por cada una de las cargas tiene el mismo módulo y dirección que el de la otra, pero sentido contrario, por lo que el campo eléctrico en dicho punto es nulo. En el punto B, los módulos de los campos respectivos creados por las dos cargas son iguales, pero de distinta dirección. para el ángulo α se cumplirá que:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{4} \qquad \alpha = 26,56^{\text{o}}$$

Por tanto, en el punto B, el campo resultante tendrá, únicamente, componente y, siendo su módulo:

$$\left|\overrightarrow{E}\right| = \left|\overrightarrow{E_1}\right| \cos 26,56^{\text{o}} + \left|\overrightarrow{E_2}\right| \cos 26,56^{\text{o}} = 2\,\frac{9\cdot 10^9 \cdot 5\cdot 10^{-9}}{0,04^2}\cos 26{,}56 = 5,03\cdot 10^4\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$$

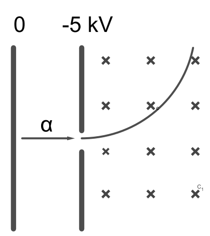
b) Los potenciales en los punto A y B son, respectivamente:

$$V_A = \frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-9}}{0,02} = 4500\,\mathrm{V} \qquad \mathrm{V_B} = \frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-9}}{0,04} = 2250\,\mathrm{V}$$

El trabajo necesario para trasladar una carga de 3 nC desde A a B será:

$$W = q(V_A - V_B) = 3\cdot 10^{-9}(4500 - 2250) = 6,75\cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

6. Una partícula alfa (núcleo de helio) inicialmente en reposo se acelera a través de una diferencia de potencial de 5 kV, y entra en una región con un campo magnético de 0,3 T perpendicular a su velocidad, como muestra la figura. Determine al penetrar en el campo magnético: a) La energía cinética



adquirida por la partícula y el módulo de su velocidad. b) La fuerza magnética que experimenta la partícula y el radio de curvatura de la trayectoria. Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}60\cdot 10^{-19}$ C; Masa de la partícula alfa, $m_\alpha = 6{,}68\cdot 10^{-27}$ kg.

Respuesta:

a) La energía cinética será:

$$E_c = q(V_A - V_B) = 2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5000 = 1,6\cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$$

Puesto que podemos escribir:

$$E_c = 1,6 \cdot 10^{-15} = \frac{1}{2} 6,68 \cdot 10^{-27} v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{3,2 \cdot 10^{-15}}{6,68 \cdot 10^{-27}}} = 6,92 \cdot 10^5 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

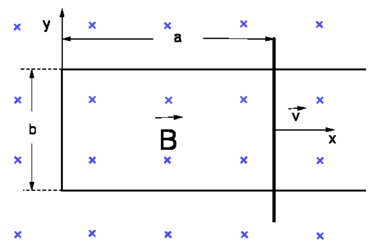
b) El módulo de la fuerza magnética es:

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = \left|q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right| = 3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 6,92 \cdot 10^5 \cdot 0,3 = 6,64 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}$$

Y el radio de la trayectoria:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{6,68 \cdot 10^{-27} \cdot 6,92 \cdot 10^5}{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 0,3} = 0,048\,\mathrm{m}$$

7. Sea un campo magnético uniforme $\overrightarrow{B} = -B_0 \overrightarrow{k}$, con B_0 = 0,3 T. En el plano xy, hay una espira rectangular cuyos lados miden, inicialmente, a = 1 m y b = 0,5 m. La varilla de longitud b se puede desplazar en la dirección del eje x, tal y como se ilustra en la figura.



Determine, para t = 2 s, el flujo a través de la espira y la fuerza electromotriz inducida en la misma si: a) La varilla se desplaza con velocidad constante de 3 m s^{-1} b) Partiendo del reposo la varilla se desplaza con aceleraci6n constante de 2 m s^{-2}

Respuesta:

a) La superficie atravesada por el campo magnético en un tiempo Δ t será:

$$\overrightarrow{S} = 0,5 \cdot 3 \cdot \mathrm{t}\, \overrightarrow{k}$$

El flujo del campo magnético para t = 2 s será:

$$\varphi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = -0,3\,\overrightarrow{k} \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 2\,\overrightarrow{k} = -0,90\,\mathrm{wb}$$

La fuerza electromotriz inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}(-0,3\,\overrightarrow{k} \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = 0,45\,\mathrm{V}$$

b) Cuando la varilla se desplace con aceleración constante de 2 m· s^{-2}, la longitud de a en función del tiempo será: a $= \frac{1}{2}\, 2\,\mathrm{t}^2$, con lo que el área de la espira será:

$$\overrightarrow{S} = -0,5 \cdot \mathrm{t}^2\, \overrightarrow{k} \qquad \varphi = -0,3 \cdot 0,5 \cdot \mathrm{t}^2 = 0,6\,\mathrm{wb}$$

La fuerza electromotriz inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}(-0,3\,\overrightarrow{k} \cdot 0,5 \cdot \mathrm{t}^2\, \overrightarrow{k})}{\mathrm{dt}} = 0,60\,\mathrm{V}$$

8. Considérese una carga $q_1 = 6$ µC, situada en el origen de coordenadas. Determine: a) El trabajo necesario para llevar una carga $q_2 = 10$ µC desde una posici6n muy alejada, digamos $x = \infty$, hasta la posición x = 10 m. b) El punto entre ambas cargas en el que una carga q estaría en equilibrio. Dato: Constante de la Ley de Coulomb, $K = 9{\cdot}10^9$ N·m^2 C^{-2}

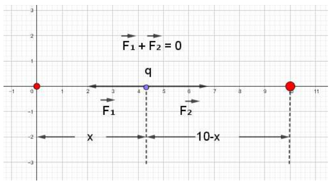
Respuesta:

a) El trabajo necesario sería:

$$W = 10^{-5}(V_\infty - V_{10}) = 10^{-5}\left(0 - \frac{9\cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{10}\right) = -0,054\,\mathrm{J}$$

El signo negativo del trabajo indica que dicho trabajo debe ser realizado contra el campo creado por la carga de 6 μC.

b) La posición de la carga de 6 μC es (0,0), mientras que la posición de la carga de 10 μC es (0,0). A partir de la siguiente representación gráfica:



Podemos deducir lo siguiente:

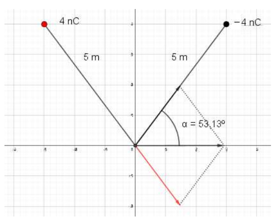
$$\frac{K\cdot 6\cdot 10^{-6}}{x^2} = \frac{K\cdot 10^{-5}}{(10-x)^2} \qquad x = 4,36\,\mathrm{m}$$

El punto de equilibrio se encontrará sobre el eje X,a 4,36 m a la izquierda del origen de coordenadas

9. Dos cargas q_1 = -4 nC y q_2 = 4 nC están situadas en los puntos P_1 (3, 4) y P_2 (-3, 4), respectivamente, del plano xy (coordenadas expresadas en metros). Determine: a) El vector campo eléctrico en el origen de coordenadas. b) El potencial electrostático en el origen de coordenadas. Dato: Constante de la Ley de Coulomb, $K=1/4\pi\varepsilon_0 = 9{\cdot}10^9$ m^2 C $^{-2}$

Respuesta:

a) A partir de la siguiente representación gráfica:



Podemos deducir lo siguiente:

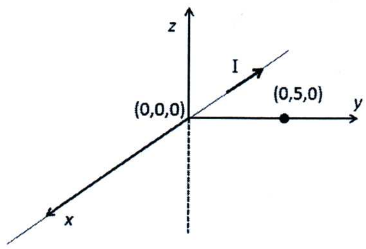
$$\left|\overrightarrow{E_1}\right| = \left|\overrightarrow{E_2}\right| = \frac{9\cdot 10^9\cdot 4\cdot 10^{-9}}{25} = 1,44$$

Las componentes verticales de los dos vectores campo se anulan, con lo que el vector campo resultante será:

$$\overrightarrow{E} = 2\cdot 1,44\cdot \cos 53,13\,\overrightarrow{i} = 1,73\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$$

b) Puesto que las cargas son iguales y opuestas y las respectivas distancias al origen son iguales, el potencial en dicho punto valdrá 0 V.

10. Por un hilo conductor rectilíneo situado a lo largo del eje x y que pasa por el punto (0, 0, 0), circula una corriente eléctrica de intensidad I = 10 A en el sentido negativa del eje x (coordenadas expresadas en metros) a) Calcule el vector campo magnético debido al hilo en el punto P (0, 5, 0). b) Si una carga Q = 3 mC pasa por el punto P (0, 5, 0) con una velocidad v = $4\vec{i} + 4\vec{j}$ m·s^{-1}, Cuál es el vector fuerza magnética que actúa sobre la carga? Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-1}



Respuesta:

a) El módulo del campo magnético en el punto P será:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi \mathrm{d}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 5} = 4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$$

Al aplicar la regla de la mano derecha: $\vec{B} = -4 \cdot 10^{-7}\vec{k}$ T

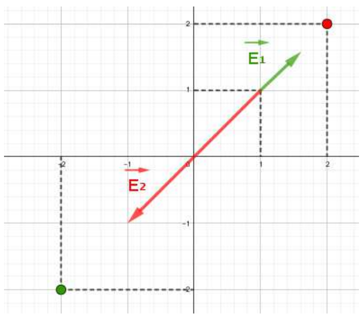
b) la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la carga es:

$$\vec{F} = \mathrm{q}\vec{v} \times \vec{B} = 3 \cdot 10^{-3}[(4\vec{i} + 4\vec{j}) \times (-4 \cdot 10^{-7}\vec{k})] = 4,8 \cdot 10^{-9}(-\vec{i} + \vec{j})\,\mathrm{N}$$

11. Dos cargas eléctricas, positivas e iguales, situadas en los puntos (2, 2) m y (-2, -2) m generan un campo eléctrico en el punto (1, 1) m de módulo E = $5 \cdot 10^3$ N C^{-1}; determine: a) El valor de las cargas eléctricas y el vector campo eléctrico en el punto (-1, -1) m. b) El trabajo necesario para traer una carga de 2 C desde el infinito hasta el punto (-1, -1) m. Dato: Constante de la Ley de Coulomb, K = $9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Respuesta:

a) A partir de la siguiente representación gráfica: Podemos deducir lo siguiente:



$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{E_2}\right| - \left|\vec{E_1}\right| = \frac{9 \cdot 10^9 \mathrm{q}}{1^2 + 1^2} - \frac{9 \cdot 10^9 \mathrm{q}}{3^2 + 3^2} = 5,4 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1}$$

Obteniéndose un valor: $\mathrm{q} = 1,25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$

La intensidad de campo eléctrico será:

$$\vec{E} = 5,4 \cdot 10^3(-\cos 45\,\vec{i} - \cos 45\,\vec{j}) = -3,54 \cdot 10^3\vec{i} - 3,54 \cdot 10^3\vec{j}$$

b) El trabajo necesario para desplazar la carga hasta el punto P(-1,-1) será:

$$\mathrm{W} = \mathrm{q}\left(\mathrm{V}_{\infty} - \mathrm{V_P}\right) \qquad \mathrm{V}_{\infty} = 0 \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{V_p} = \frac{9\cdot10^{9}1,25\cdot10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{9\cdot10^{9}1,25\cdot10^{-6}}{\sqrt{18}} = 1,06\cdot10^{4}\,\mathrm{V}$$

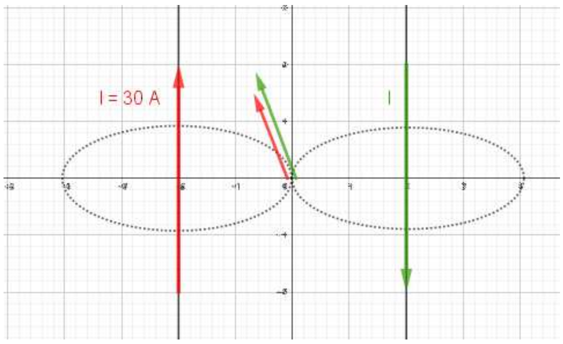
$$\mathrm{W} = 2\left(0 - 1,06\cdot10^{4}\right) = -2,12\cdot10^{4}\,\mathrm{J}$$

El signo negativo del trabajo indica que éste debe ser realizado en contra del campo eléctrico.

12. Dos hilos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos al eje z se encuentran situados en el plano yz. Uno de los hilos pasa por el punto (0, -5, 0) cm y su corriente tiene una intensidad I_1= 30 A y sentido z positivo. El otro conductor pasa por el punto (0, 5, 0) cm y su intensidad de corriente I_2 tiene sentido z negativo. Sabiendo que el módulo del campo magnético en el punto (0, 0, 0) es B 2,8·10^{-4}T , calcule: a) El valor de la intensidad I_2 y el vector campo magnético en el punto (0, 10, 0) cm. b) La fuerza magnética por unidad de longitud que actúa sobre el conductor que pasa por el punto (0, -5, 0) cm debida a la presencia del otro, indicando su dirección y sentido. Dato: Permeabilidad magnética del vacío, μ_0 = 4π·10^{-7} N A^{-2}.

Respuesta:

a) En el punto (0,0,0), y basándonos en la siguiente representación gráfica:

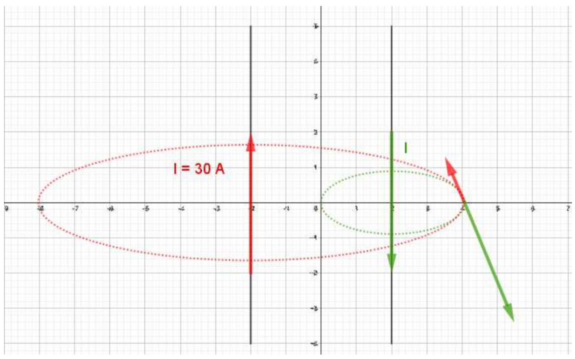


Podremos deducir lo siguiente:

$$\left|\overrightarrow{B}\right| = \left|\overrightarrow{B_1}\right| + \left|\overrightarrow{B_2}\right| = 2,8\cdot10^{-4}\,\mathrm{T}$$

$$\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot30}{2\pi\cdot0,05} + \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot\mathrm{I}}{2\pi\cdot0,05} = 2,8\cdot10^{-4} \qquad \mathrm{I} = 40\,\mathrm{A}$$

En el punto (0,10,0), tal y como podemos ver en la siguiente imagen:



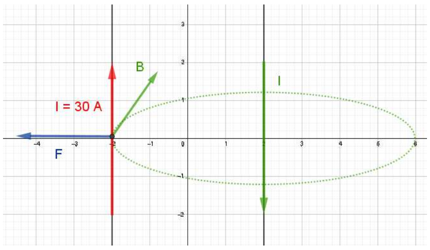
El campo magnético será:

$$\left|\overrightarrow{B}\right| = \left|\overrightarrow{B_2}\right| - \left|\overrightarrow{B_1}\right| = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot40}{2\pi\cdot0,05} - \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot30}{2\pi\cdot0,15} = 1,2\cdot10^{-4}\,\mathrm{T}$$

El campo estará dirigido en el sentido positivo del eje X, siendo, por tanto:

$$\overrightarrow{B} = 1,2 \cdot 10^{-4}\,\overrightarrow{i}\ \mathrm{T}$$

b) En el punto (0,-5,0) el vector fuerza será el siguiente:



Siendo la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{l}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 30 \cdot 40}{2\pi \cdot 0,1} = 2,4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1} \qquad \overrightarrow{F/l} = 2,4 \cdot 10^{-3}\,\overrightarrow{j}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

5. Física moderna.

1. Se dispone de una muestra del isótopo ^{226}Ra cuyo periodo de semidesintegración es 1588,69 años. a) Determine la constante de desintegración del isótopo. b) Transcurridos 200 años, el número de núcleos que no se han desintegrado es 9,76·10^{16}. ¿Cuál era la masa inicial de la muestra de ^{226}Ra? Datos: Masa atómica del ^{226}Ra, M = 226 u; Número de Avogadro, N$_A$ = 6,02·10^{23} mol^{-1}.

   Respuesta:

   a) La constante de desintegración se calcula de la forma:

   $$\lambda = \frac{ln\,2}{\tau} = \frac{0,693}{1588,69} = 4,36 \cdot 109^{-4}\text{años}^{-1}$$

   b) Sustituyendo en la ecuación de la desintegración radiactiva: $N = N_0 e^{-\lambda t}$,tendremos:

   $$9,76 \cdot 10^{16} = N_0 e^{-4,36 \cdot 10^{-4} \cdot 200} \longrightarrow N_0 = 1,065 \cdot 10^{17}\text{núcleos}$$

   El número de moles será:

   $$n = \frac{1,065 \cdot 10^{17}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,22 \cdot 10^{-7} moles$$

   Mientras que la masa inicial será m = n·M = 1,22·10^{-7}·226 = $3,88 \cdot 10^{-5} u$

2. Fotones de 150 nm de longitud de onda inciden sobre una placa metálica produciendo la emisión de electrones. Si el potencial de frenado es de 1,25 V, determine: a) La energía de los fotones incidentes y la energía cinética máxima de los electrones emitidos. b) La longitud de onda asociada a los electrones emitidos con la energía cinética máxima. Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6·10^{-19} C; Constante de Planck, h = 6,63·10^{-34} J s; Velocidad de la luz en el vacío, c = 3·10^{8} m s^{-1}; Masa del electrón, m$_e$ = 9,1·10^{-31} kg.

   Respuesta:

   a) La energía de los fotones incidentes es:

   $$h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{-7}} = 1,326 \cdot 10^{-18}\text{J}$$

   Mientras que la energía cinética máxima de los electrones emitidos será:

   $$E_c = qV_f = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,25 = 2 \cdot 10^{-19}\text{J}$$

   b) Para conocer la longitud de onda asociada a los electrones, debemos conocer la cantidad de movimiento de los mismos. Sabiendo que la energía cinética máxima es: $E_c = 2 \cdot 10^{-19}$J, podremos poner:

   $$\frac{1}{2} 9,1 \cdot 10^{-31} v^2 = 2 \cdot 10^{-19} \quad \text{por lo que :} \quad v = 6,63 \cdot 10^5 \text{m/s}$$

   Así pues, la cantidad de movimiento del electrón será: p = mv =$9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6,63 \cdot 10^5$ = 6,033·10^{-25} kg·m $\cdot$ s^{-1}, y la longitud de onda asociada, será:

   $$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{6,033 \cdot 10^{-25}} = 1,1 \cdot 10^{-9}\text{m}$$

3. a)¿Qué energía cinética, expresada en keV, tiene que tener un protón para que la longitud de onda asociada sea λ = 4·10^{-13} m? b) ¿Cuál tendría que ser la longitud de onda de un fotón que en el vacío tuviera la misma energía que el protón? Datos: Constante de Planck, h = 6,63·10^{-34} J s; Valor absoluto de la carga del electrón: e = 1,60·10^{-19} C; Masa del protón, m$_p$ = 1,67·10^{-27} kg; Velocidad de propagación de la luz en el vacío, c = 3·10^{8} m s^{-1}.

Respuesta:

a) La longitud de onda de De Broglie asociada al protón es:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad v = \frac{h}{\lambda \cdot m} = \frac{6,67 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 10^{-13} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} = 9,98 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

La energía cinética será, expresada en keV será:

$$E_c = \frac{1/2\,1,67 \cdot 10^{-27}\,(9,98 \cdot 10^{5})^2}{1,60 \cdot 10^{-16}} = 5,20\,\mathrm{keV}$$

b) La longitud de onda de un fotón (cuya velocidad es la de la luz) está relacionada con su energía por la expresión:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E} \quad \text{Sustituyendo}: \quad \lambda = \frac{6,67 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5,20 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}} = 2,41 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

4. Una onda electromagnética de 280 nm incide sobre un metal cuyo trabajo de extracción es W_0 = 4,08 eV. Determine: a) La energía cinética máxima con la que pueden ser emitidos los electrones. b) El potencial eléctrico requerido para frenar a todos los electrones emitidos. Datos: Constante de Planck, h = $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s; Valor absoluto de la carga del electrón: e = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C; Velocidad de propagación de la luz en el vacío, c = $3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}.

Respuesta:

a) Aplicando la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$h\nu = W_{ext} + E_c \quad \frac{6,67 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2,8 \cdot 10^{-7}} = 4,08 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} + E_c$$

Se obtiene E_c = $6{,}18 \cdot 10^{-20}$ J

b) El potencial de frenado se obtendrá de:

$$E = qV_f \quad V_f = \frac{E}{q} = \frac{6,18 \cdot 10^{-20}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,39\,\mathrm{V}$$

5. Un átomo de 238U se desintegra a través de una cascada radioactiva y da lugar a un átomo de 206Pb, siendo el periodo de semidesintegración del ^{238}U de $4{,}47 \cdot 10^{9}$ años. Una muestra mineral de monacita contiene 2,74 mg de ^{238}U y 1,12 mg de ^{206}Pb procedentes de la desintegración del uranio. a) Obtenga el número de átomos iniciales de ^{238}U en la muestra, a partir del cálculo del número de átomos de uranio y de plomo existentes en ella. b) Calcule la antigüedad del mineral y determine la actividad actual de la muestra. Datos: Masa atómica del ^{238}U, M_U = 238,05 u; Masa atómica del plomo ^{206}Pb, M_{Pb} = 205,97 u; Número de Avogadro, N_A = $6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

Respuesta:

a) 1,12 mg de ^{206}Pb corresponden a un número de átomos:

$$n_{Pb} = \frac{1,12 \cdot 10^{-3}}{205,97}\,6,02 \cdot 10^{23} = 3,27 \cdot 10^{18}\,\text{átomos}$$

El número de átomos de ^{206}Pb será:

$$n_U = \frac{2,74 \cdot 10^{-3}}{238,05}\,6,02 \cdot 10^{23} = 6,93 \cdot 10^{18}\,\text{átomos}$$

Por tanto, el número inicial de átomos será: $N_0 = n_{Pb} + n_U = 3,27 \cdot 10^{18} + 6,93 \cdot 10^{18} = 1,02 \cdot 10^{19}$ átomos

b) Aplicando la ley de la desintegración radiactiva:

$$6,93 \cdot 10^{18} = 1,02 \cdot 10^{19} e^{-(0,693/4,47\cdot 10^{9})t} \qquad t = 2,49 \cdot 10^{9}\text{años.}$$

La actividad actual será:

$$A = \lambda N = \frac{0,693}{4,47 \cdot 10^{9} \cdot 365 \cdot 86400} 6,93 \cdot 10^{18} = 34 \, \text{desintegraciones} \cdot \text{s}^{-1}$$

6. Para observar el efecto fotoeléctrico sobre un metal que posee una función de trabajo de 2,1 eV se utiliza una lámpara de Cd que emite en cuatro líneas espectrales de distinta longitud de onda: línea roja a 643,8 nm; línea verde a 538,2 nm; línea azul a 480,0 nm y línea violeta a 372,9 nm. a) ¿Qué líneas espectrales provocarán efecto fotoeléctrico en ese material? Justifique la respuesta. Calcule la energía cinética máxima de los fotoelectrones si se utiliza la línea espectral azul. b) Determine la longitud de onda de De Broglie asociada a los fotoelectrones con energía cinética máxima utilizando la línea azul. ¿Podrían ser considerados esos electrones como relativistas? Justifique la respuesta. Datos: Velocidad de la luz en el vacío, c = $3{\cdot}10^{8}$ m s^{-1}; Constante de Planck, h = $6{,}63{\cdot}10^{-34}$ J s; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C; Masa en reposo del electrón, me = $9{,}1{\cdot}10^{-31}$ kg.

Respuesta:

a) A partir de la función de trabajo, calculamos la longitud de onda umbral:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_{ext}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,92 \cdot 10^{-7} \, \text{m}$$

Por tanto producirán efecto fotoeléctrico todas las líneas espectrales de menor longitud de onda que λ_0, es decir, las líneas verde, azul y violeta. La energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos por acción de la línea azul es:

$$E_c = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{4,8 \cdot 10^{-7}} - 2,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 7,83 \cdot 10^{-20} \, \text{J}$$

b) La velocidad de los electrones emitidos es:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,83 \cdot 10^{-20}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 4,14 \cdot 10^{5} \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La longitud de onda de De Broglie tiene el valor:

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4,14 \cdot 10^{5}} = 1,76 \cdot 10^{-9} \, \text{m}$$

Estos electrones no pueden ser considerados como relativistas, debido a que su velocidad es muy inferior a la de la luz.

7. Si el trabajo de extracción de un metal es de 2 eV, ¿con fotones de que frecuencia habría que iluminar el metal para que los electrones extraídos tuvieran una velocidad máxima de $7{\cdot}10^{5}$ m $s^{\cdot 1}$? Datos: Constante de Planck, h = $6{,}63{\cdot}10^{-34}$ J s; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C; Masa del electrón, m, = 9, $11{\cdot}10^{-31}$ kg.

Respuesta:

8. Determine: a) La velocidad a la que debe desplazarse un electrón para que su longitud de onda asociada sea la misma que la de un fotón de 0,02 MeV de energía. b) La energía que tiene el electrón en eV y su momento lineal. Datos: Constante de Planck, h = $6{,}63{\cdot}10^{-34}$ J s; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}60{\cdot}10^{-19}$ C; Masa del electrón, m_e = $9{,}11{\cdot}10^{-31}$ kg; Velocidad de la luz en el vacío; c = $3{\cdot}\ 10^{8}$ m s^{-1}

Respuesta:

a) La longitud de onda del fotón puede ser calculada a partir de:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Sustituyendo valores:

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{0,02 \cdot 10^{6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,22 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$$

Aplicando la ecuación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \qquad v = \frac{6,63{\cdot}10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 6,22 \cdot 10^{-11}} = 1,17 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) La energía del electrón, expresada en eV es:

$$E = \frac{1/2\, 9,11 \cdot 10^{-31}\,(1,17 \cdot 10^{7})^2}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 389,71\,\mathrm{eV}$$

Su momento lineal será:

$$p = mv = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,17 \cdot 10^{7} = 1,06 \cdot 10^{-23}\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

9. Un láser emite luz de frecuencia 1,54·10^{15} Hz. a) Determine la longitud de onda de la luz emitida por el láser. b) Si el haz de luz incide sobre una superficie de wolframio cuya longitud de onda umbral es de 230 nm, Cual es la energía cinética máxima de los electrones emitidos? Datos: Constante de Planck, h = 6,63·10^{-34} J s; Velocidad de la luz en el vacío, c = 3·10^{8} m s·1

Respuesta:

a) La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{1,54{\cdot}10^{15}} = 1,95 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

b) Aplicando la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$6,63{\cdot}10^{-34} \cdot 1,54{\cdot}10^{15} = 6,63{\cdot}10^{-34}\,\frac{3 \cdot 10^{8}}{2,3 \cdot 10^{-7}} + E_c \qquad E_c = 1,56 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

10. Una muestra, de masa m = 30 g, esta compuesta por un elemento radiactivo cuya masa molar es de 87 g·mo1·1 En la actualidad la muestra posee una actividad de 2,85·10^{12} Bq. Calcule: a) El periodo de semidesintegraci6n del elemento radiactivo. b) La masa de la muestra dentro de 6000 años. Dato: Numero de Avogadro, N_A = 6,02·10^{23} mo1^{-1}

Respuesta:

a) El número de núcleos de este elemento es:

$$N_0 = \frac{30}{87}\,\mathrm{mol} \cdot 6,02{\cdot}10^{23}\mathrm{mo1^{-1}} = 2,08 \cdot 10^{23}$$

Conocida la actividad en este momento, podemos calcular la constante de desintegración:

$$A = \lambda N_0 \qquad 2,85 \cdot 10^{12} = \lambda \cdot 2,08 \cdot 10^{23} \cdot 2,08 \cdot 10^{23}$$

$$\lambda = 1{,}37 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s^{-1}} \quad \text{equivalentes a} \quad 4,32 \cdot 10^{-4}\,\text{años}^{-1}$$

El periodo de semidesintegración será:

$$\tau = \frac{0,693}{1,37 \cdot 10^{-11}} = 5,06 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} \quad \text{equivalentes a} \quad 1604\,\text{años}$$

b) Al cabo de 6000 años, la masa restante será:

$$m = 30 \cdot e^{-4{,}32{\cdot}10^{-4}{\cdot}6000} = 2,25\,\mathrm{g}$$

11. El ^{14}C tiene un periodo de semidesintegración de 5730 años. Si inicialmente se tiene una muestra de 2 mg, determine: a) El tiempo que tiene que transcurrir para que la muestra se reduzca a 0,5 mg . b) La actividad inicial de la muestra. Datos: Número de Avogadro, N_A = 6,02·10^{23} mol^{-1}; Masa Atómica del ^{14}C, M = 14,00 u.

Respuesta:

a) Conocido el periodo de semidesintegración, podemos conocer la constante λ :

$$\lambda = \frac{0,693}{5730} = 1,209 \cdot 10^{-4}\,\text{años}^{-1}$$

$$0,5 = 2 \cdot e^{-1,209 \cdot 10^{-4} t} \qquad t = 11460\,\text{años}$$

Otra forma de resolver este apartado consiste en observar que el número de núcleos se ha reducido a la cuarta parte, por lo que habrá transcurrido un tiempo igual a dos periodos de semidesintegración, es decir, 2·5730 = 11460 años

b) Para calcular la actividad inicial de la muestra, debe calcularse el número inicial de núcleos:

$$N_0 = \frac{2 \cdot 10^{-3}\text{g}}{14\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} \cdot 6,023 \cdot 10^{23}\text{mol}^{-1} = 8,6 \cdot 10^{19}\,\text{núcleos}$$

La constante de desintegración deberá expresarse en s^{-1} , es decir: $\lambda = \dfrac{1,209 \cdot 10^{-4}}{365 \cdot 86400} = 3,834 \cdot 10^{-12}\,\text{s}^{-1}$.Teniendo esto en cuenta, la actividad inicial será:

$$A_0 = \lambda N_0 = 3,834 \cdot 10^{-12} \cdot 8,6 \cdot 10^{19} = 3,3 \cdot 10^{5}\,\text{Bq}$$

12. Al iluminar un metal con luz de longitud de onda en el vacío = 700 nm, se observa que emite electrones con una energía cinética máxima de 0,45 eV. Se cambia la longitud de onda de la luz incidente y se mide de nuevo la energía cinética máxima, obteniéndose un valor de 1,49 eV. Calcule: a) La frecuencia de la luz utilizada en la segunda medida. b) A partir de qué frecuencia no se observará el efecto fotoeléctrico en el metal. Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6·10^{-19} C; Velocidad de la luz en el vacío, c = 3·10^{8} m s^{-1}; Constante de Planck h = 6,63·10^{-34} J s.

Respuesta:

a) Las respectivas energía cinéticas, expresadas en J son:

$$E_{c1} = 0,45 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 7,2 \cdot 10^{-20}\,\text{J} \quad E_{c2} = 1,49 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,384 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$$

Aplicando en ambos casos la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$\frac{6,63{\cdot}10^{-34} \cdot 3{\cdot}10^{8}}{7 \cdot 10^{-7}} = W_{ext} + 7,2 \cdot 10^{-20}$$

$$\frac{6,63{\cdot}10^{-34} \cdot 3{\cdot}10^{8}}{\lambda} = W_{ext} + 2,384 \cdot 10^{-19}$$

Restando miembro a miembro la primera igualdad a la segunda:

$$\frac{6,63{\cdot}10^{-34} \cdot 3{\cdot}10^{8}}{\lambda} - \frac{6,63{\cdot}10^{-34} \cdot 3{\cdot}10^{8}}{7 \cdot 10^{-7}} = 2,384 \cdot 10^{-19} - 7,2 \cdot 10^{-20}$$

Obteniéndose $\lambda = 4,42 \cdot 10^{-7}$ m

b) Despejamos el trabajo de extracción en la primera igualdad:

$$E_{ext} = \frac{6,63{\cdot}10^{-34} \cdot 3{\cdot}10^{8}}{7 \cdot 10^{-7}} - 7,2 \cdot 10^{-20} = 2,12 \cdot 10^{-19}$$

E igualamos:

$$W_{ext} = h\nu_0 \qquad \nu_0 = \frac{2,12 \cdot 10^{-19}}{6,63{\cdot}10^{-34}} = 3,2 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1}$$