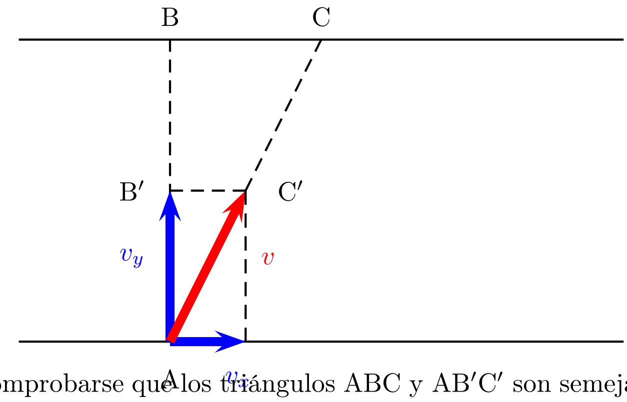
Principio de independencia de movimientos: el tiro parabólico.

Un ejemplo sencillo de composición de movimientos podría ser el siguiente: un nadador desea ir desde el punto A, situado en una orilla de un río hasta el punto B situado en la otra orilla. El nadador se desplaza con velocidad constante v_y, mientras que la corriente lleva una velocidad v_x. En consecuencia, el nadador llegará al punto C de la orilla opuesta, en lugar de al punto B. Vamos a demostrar que el tiempo invertido por el nadador para ir desde A hasta C sería el mismo que el invertido en ir desde A hasta B (suponiendo, en este caso, que la velocidad de la corriente fuera nula).



En la figura puede comprobarse que los triángulos ABC y AB′C′ son semejantes, por lo que podemos establecer la siguiente igualdad:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$$

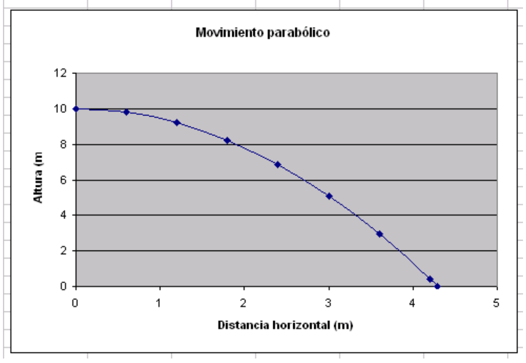
Si tenemos en cuenta que AC′$= |\vec{v}|$ y AB′$= |\vec{v_y}|$, nos quedará:

$$\frac{\overline{AC}}{|\vec{v}|} = \frac{\overline{AB}}{|\vec{v_y}|}$$

Siendo $\frac{\overline{AC}}{|\vec{v}|} = t_1$ y $\frac{\overline{AB}}{|\vec{v_y}|} = t_2$, donde t_1 y $t_2$son los tiempos necesarios para recorrer las distancias $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, deduciéndose que $t_1 = t_2$, que es lo que se pretendía demostrar.

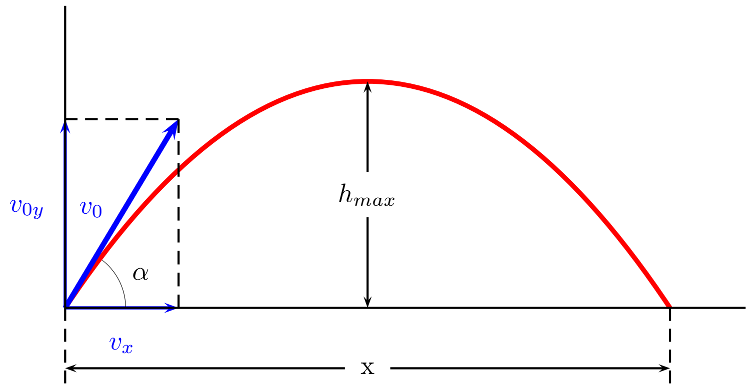
De forma análoga podemos comprobar que un móvil en caída libre desde una altura h tardará el mismo tiempo en llegar al suelo que otro móvil que, desde la misma altura, caiga con una velocidad horizontal no nula. El movimiento de este cuerpo será parabólico, tal y como se puede comprobar en la siguiente gráfica, correspondiente a un cuerpo que cae desde una altura de 10 m, con una velocidad horizontal constante de 3 m/s.

Tiempo	Altura	Distancia horizontal
0	10	0
0,2	9,804	0,6
0,4	9,216	1,2
0,6	8,236	1,8
0,8	6,864	2,4
1	5,1	3
1,2	2,944	3,6
1,4	0,396	4,2
1,428	0,0079984	4,284



Apliquemos ahora lo anterior al caso de un lanzamiento efectuado con una velocidad inicial v_0 y formando un ángulo α con respecto a la horizontal. La velocidad inicial del lanzamiento v_0, podrá descomponerse en una componente horizontal, v_x y otra componente vertical, v_{0y}, cuyos valores, en función del ángulo α serán, respectivamente:

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad \text{y} \qquad \mathrm{v_{0y} = v_0\, sen}\,\alpha$$



La ecuación para un movimiento rectilíneo uniforme es:

$$(1) \quad x = x_0 + v_x t = x_0 + v_0 t \cos\alpha$$

La componente horizontal de la velocidad, v_x , no varía con el tiempo, mientras que la componente vertical de la velocidad, al actuar verticalmente la aceleración de la gravedad, podrá expresarse como:

$$(2) \quad v_y = v_{0y} - gt = v_0 \mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{gt}$$

Por otra parte, la expresión que nos da la altura del cuerpo en función del tiempo es la siguiente:

$$(3) \quad h = h_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = h_0 + v_0 t\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Vamos, en primer lugar, a calcular la altura máxima alcanzada por el cuerpo. En dicho punto se cumplirá que $v_y = 0$, por lo cual:

$$0 = v_0 \mathrm{sen}\alpha - gt_1 \quad \text{de donde se deduce} \quad \mathrm{t_1} = \frac{\mathrm{v_o sen}\,\alpha}{\mathrm{g}} :$$

Siendo $t_1$el tiempo necesario para que el cuerpo alcance su máxima altura. Sustituyendo este valor en la ecuación (3), tendremos:

$$h_{max} = h_0 + \frac{(v_0 \mathrm{sen}\alpha)^2}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \mathrm{sen}\,\alpha}{g}\right)^2 = h_0 + \frac{(v_0 \mathrm{sen}\alpha)^2}{2g}$$

Vamos, a continuación, a calcular el valor de x (distancia horizontal recorrida o alcance) cuando la altura final del cuerpo valga h. Despejando el tiempo en la ecuación (**3**), tendremos:

$$t_2 = \frac{v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha \pm \sqrt{\mathrm{v_0^2 sen^2}\alpha - \mathrm{2g(h - h_0)}}}{g}$$

Sustituyendo dicho tiempo en (**1**):

$$x = x_0 + (v_0 \cos\alpha)\, \frac{\mathrm{v_0\, sen}\,\alpha \pm \sqrt{\mathrm{v_0^2 sen^2}\alpha - \mathrm{2g(h - h_0)}}}{\mathrm{g}}$$

En en caso particular de que la altura final y la inicial coincidan, $h - h_0 = 0$,tendremos:

$$x = x_0 + \frac{2v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{g}$$

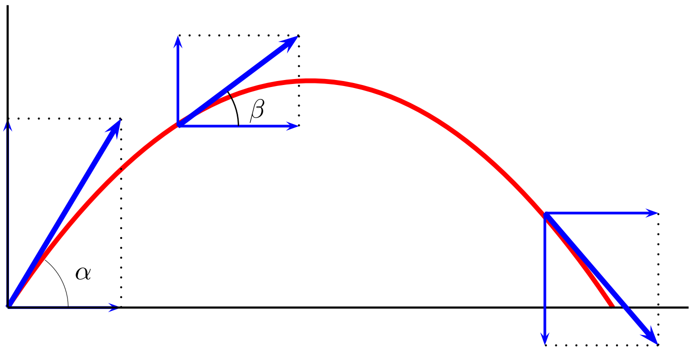
Excluimos el valor de $t_2 = 0$ que habría hecho $h = h_0$ en el instante inicial del lanzamiento.

Si aplicamos la igualdad trigonométrica $sen\,(A + A) = 2\,senA\,cosA$, podremos poner:

$$x = x_0 + \frac{v_0\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{g}$$

Puesto que el valor máximo del seno de cualquier ángulo es 1, que corresponde a un ángulo de 90º, tendremos que el alcance máximo se dará cuando $2\alpha = 90^{\circ}$, es decir, para un ángulo $\alpha = 45^{\circ}$

Veamos ahora cómo calcular el ángulo que forma la trayectoria del cuerpo con la horizontal para un tiempo determinado. Para ello, tendremos en cuenta que el vector velocidad será, en todo punto, tangente a la trayectoria, lo que podemos ver reflejado en la siguiente imagen:



Como puede verse, la velocidad vertical va disminuyendo con el transcurso del tiempo, haciéndose nula en el punto de máxima altura. Los vectores representados con trazo grueso corresponden a la velocidad resultante en cada punto. De la gráfica puede deducirse que:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{v_y}}{\mathrm{v_x}} = \frac{\mathrm{v_0}\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{gt}}{\mathrm{v_0}\,\cos\alpha}$$

Un caso particular del tiro parabólico lo constituye el tiro horizontal. Es innecesario hacer un planteamiento similar al anterior para este tipo de movimiento, pues la única consideración a tener en cuenta es que el ángulo de lanzamiento será $\alpha = 0^{\circ}$.

En resumen: cualquier problema de tiro parabólico precisará para su resolución de las ecuaciones señaladas con (**1**), (**2**) y (**3**).

Veamos ahora algunos ejemplo de resolución de problemas de tiro parabólico:

Ejemplo 1: Un arquero dispara una flecha desde una altura de 1,70 m, con una velocidad inicial de 35 m/s y un ángulo $\alpha = 20^{\circ}$. ¿Qué distancia horizontal habrá recorrido hasta llegar al suelo y cuál será la máxima altura alcanzada.

Solución: Los datos de que disponemos son los siguientes: $h_0 = 1,70\,\mathrm{m}$; $\mathrm{h} = 0\,\mathrm{m}$; $\mathrm{v_0} = 35\,\mathrm{m/s}$; $\alpha = 20^{\circ}$.

El tiempo necesario para que la flecha llegue al suelo se hallará utilizando la ecuación (**3**). Al sustituir los valores, tendremos:

$$0 = 1,70 + 35t\,\mathrm{sen}\,20^{\circ} - \frac{1}{2}\,\mathrm{gt}^2$$

Resolviendo esta ecuación de 2º grado obtenemos como solución físicamente válida, $t =$ 2,8 s. Sustituyendo este valor en la ecuación (**1**), nos queda:

$$x = 35\,t\cos 20^{\circ} = 35 \cdot 2,58 \cdot \cos 20^{\circ} = 84,85\;\mathrm{m}$$

En cuanto a la altura máxima, sabiendo que en ese punto la velocidad vertical es nula, tendremos, al sustituir en (**2**):

$$0 = 35 \cdot \mathrm{sen}\,20^{\circ} - 9,8\,\mathrm{t}$$

Obteniéndose t = 1,22 s y, por tanto:

$$h_{max} = 1,7 + 35 \cdot 1,22 \cdot \text{sen}\, 20^{\text{o}} - \frac{1}{2}\, 9,8 \cdot 1,22^2 = 9,01\,\text{m}$$

Ejemplo 2: Una pelota rueda sobre una mesa horizontal con velocidad de 3 m/s. Si la altura de la mesa es de 0,8 m: a) Qué distancia horizontal, medida desde la vertical del extremo de la mesa, habrá recorrido la pelota hasta tocar el suelo? b) ¿Qué ángulo formará la trayectoria de la pelota con la horizontal para un tiempo de 0,3 s?

Solución: Los datos proporcionados por el enunciado son los siguientes: $h = 0,8\,\text{m}$; $h = 0\,\text{m}$; $v_0 = 3\,\text{m/s}$; $\alpha = 0$, con lo cual, sustituyendo en la ecuación (**3**):

$$0 = 0,8 + 3t\cos 0^{\text{o}} - \frac{1}{2}\, 9,8\text{t}^2$$

Al resolver esta ecuación, obtenemos $t = 0,81$s. Sustituyendo este valor del tiempo en la ecuación (**1**), obtendremos:

$$x = 3 \cdot 0,81 \cdot \cos 0^{\text{o}} = 2,43\,\text{m}$$

b) para un tiempo de 0,3 s tendremos, sustituyendo en la ecuación (**2**):

$$v_y = v_0 \text{sen}\, \alpha - 9,8\,\text{t} = -9,8 \cdot 0,3 = -2,94\,\text{m/s}$$

Dado que la velocidad horizontal es constante, $v_x = v_0 \cos 0^{\text{o}} = 3\,\text{m/s}$, tendremos que:

$$\text{tg}\, \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-2,94}{3} = -0,98$$

Lo que corresponde a $\beta = -44,42^{\text{o}}$

Ejemplo 3: Un jugador de baloncesto lanza a canasta desde una distancia de 5 m respecto a la vertical de la misma. Si el ángulo de lanzamiento es de 45º, ¿cuál será la velocidad inicial del lanzamiento para que el jugador consiga anotar? La altura inicial del lanzamiento es de 2,20 m y la altura de la canasta es de 3,05 m.

Solución: Para un alcance$x$ de 5 m (tomando $x_0 = 0$), altura inicial h_0= 2,20 m, altura final, h = 3,05 m y α = 45º, tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x = x_0 + v_0 t \cos \alpha \longrightarrow 5 = 0 + \text{v}_0\text{t}\, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h = h_0 + v_0 t \,\text{sen}\, \alpha - \frac{1}{2}\, g t^2 \longrightarrow 3,05 = 2,20 + v_0 t\, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\, g t^2$$

Resolviendo este sistema, obtendremos$t$ = 0,92 s yv_0 = **7,68 m/s**