1. Magnitudes fundamentales y derivadas: análisis dimensional

1. **Magnitudes fundamentales y derivadas**.

   Podemos definir una magnitud como una propiedad que puede ser medida de una forma directa o indirecta como, por ejemplo, la longitud, la densidad, el volumen, etc. Otras propiedades, como pueden ser el sabor o la belleza, no pueden ser medidos de forma objetiva, dependiendo del sujeto que realice la observación.
   Las magnitudes pueden ser clasificadas en dos tipos: fundamentales y derivadas. Las magnitudes fundamentales son aquellas que no precisan de otra magnitud para ser definidas (longitud, masa, tiempo...), mientras que las magnitudes derivadas precisan de más de una magnitud fundamental para ser definidas (velocidad, presión, volumen...). Como magnitudes fundamentales se consideran las siguientes: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, intensidad luminosa, y cantidad de materia.

2. **Análisis dimensional: concepto**.

   Una ecuación de dimensiones es una igualdad que nos permite expresar una magnitud cualquiera en función de una o varias magnitudes fundamentales. Para una magnitud cualquiera, X, su ecuación de dimensiones se representa de la forma: [X]. Las ecuaciones de dimensiones para las magnitudes fundamentales antes indicadas son las siguientes:

Magnitud fundamental	Ecuación de dimensiones
Longitud	L
Masa	M
Tiempo	T
Temperatura	Θ
Intensidad de corriente	I
Intensidad luminosa	J
Cantidad de materia	N

3. **Propiedades de la ecuación de dimensiones**.

- La ecuación de dimensiones de un número es la unidad.
- Una ecuación de dimensiones debe ser homogénea, es decir, la ecuación de dimensiones de cada uno de los términos que forman la expresión debe ser la misma. Por ejemplo, si una expresión es del tipo A + B + C, deberá cumplirse que: [A] = [B] = [C].
- La ecuación de dimensiones de una suma algebraica de varios términos no es igual a la suma algebraica de las ecuación de dimensiones de cada uno, sino a la de cualquiera de ellos (ver propiedad anterior)
- La ecuación de dimensiones del producto o cociente de dos expresiones es igual al producto o cociente, respectivamente, de las magnitudes fundamentales que aparecen en la magnitud.
- La ecuación de dimensiones de la potencia o raíz una magnitud es igual a la potencia o raíz de cada una de las magnitudes fundamentales que aparecen en la magnitud.
  Veamos ahora algunos ejemplos para ilustrar lo anteriormente expuesto:

  Ejemplo 1: La posición de un móvil sometido a una movimiento rectilíneo uniformemente acelerado viene dado por la expresión: $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Comprobar que dicha expresión es homogénea.

  Solución: La ecuación de dimensiones de s será:

$$[s] = \left[s_0 + v_o y + \frac{1}{2}at^2\right]$$

Para que la ecuación de dimensiones sea homogénea, deberá cumplirse que:

$$[s_0] = [v_0 t] = \left[\frac{1}{2}\, at^2\right]$$

Teniendo en cuenta que s es una longitud, v $=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ y a $=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, tendremos:

$$[s] = L \qquad [s_0] = L$$

$$[v_0 t] = [v_0]\,[t] = \frac{L}{T}\,T = L \qquad \left[\frac{1}{2}\, at^2\right] = \left[\frac{1}{2}\right][a]\left[t^2\right] = 1\,\frac{LT^{-1}}{T}\,T^2 = L$$

Por lo que la expresión es homogénea, al tener los dos miembros la misma ecuación de dimensiones.

Ejemplo 2: Comprobar que la ecuación de dimensiones de la energía cinética es la misma que la del trabajo.

Solución: La expresión del trabajo es: $W = F \cdot s \cdot cos\,\alpha$. Teniendo en cuenta que $F = ma$, la ecuación de dimensiones de W será:

$$[W] = [ma][s] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

La ecuación de dimensiones de la energía cinética será:

$$\left[\frac{1}{2}\, mv^2\right] = \left[\frac{1}{2}\right][m]\left[v^2\right] = 1 \cdot M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

Por lo que la energía cinética tiene dimensiones de trabajo.

Ejercicios.

1. **Obtener la ecuación de dimensiones de la energía potencial: U $=$ mgh**.

   Solución: La ecuación de dimensiones es la siguiente:

   $$[U] = [m]\,[g]\,[h]$$

   m es una masa, g una aceleración, y h una longitud, por lo que:

   $$[U] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

2. **Obtener la ecuación de dimensiones de ω en la expresión: x $=$ A sen (ωt), siendo x y A dos longitudes**.

   Solución: De la igualdad anterior, se puede deducir:

   $$[x] = [A]\,[sen\,(\omega t)] \qquad L = L \cdot 1$$

   Puesto que ωt es un número, su ecuación de dimensiones es la unidad. Por tanto, podemos escribir:

   $$1 = [\omega t] = [\omega]\,T$$

   De donde se deduce que $[\omega] = T^{-1}$

3. **El periodo de un péndulo simple viene dado por la expresión:**

   $$T = 2\pi\frac{l^a}{g^b}$$

   Obtener por análisis dimensional los exponentes a y b.

Solución: Teniendo en cuenta que T es un tiempo, l una longitud y g una aceleración, tendremos:

$$[T] = T \quad [l] = L \quad [g] = L \cdot T^{-2}$$

Por lo que podemos escribir:

$$T = 1 \cdot \frac{L^a}{L^b T^{-2b}} = L^{a-b} \cdot T^{2b}$$

Teniendo en cuenta que en el primer miembro no aparece L, se deduce que $a - b = 0$ y $a = b$. Por otra parte:

$$T = T^{2b} \qquad 2b = 1 \qquad b = \frac{1}{2}$$

Con lo cual, tendremos:

$$T = 2\pi \frac{l^{1/2}}{g^{1/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

4. **La velocidad de una onda en una cuerda viene dada por la expresión: $v = T^a \sigma^b$, siendo T la tensión de la cuerda, y σ la densidad lineal (masa/longitud) de la misma. Determinar por análisis dimensional los valores de$a$ y b.**

   Solución: De la expresión anterior se deduce:

   $$[v] = L \cdot T^{-1} = [T]\,[\sigma] = M^a \cdot L^a \cdot T^{-2a} \cdot M^b \cdot L^{-b} = M^{(a+b)} L^{(a-b)} \cdot T^{-2a}$$

   Puesto que en la ecuación de dimensiones de la velocidad no aparece la masa, podemos deducir que: $a + b = 0$ y, por tanto, $a = -b$.
   Por otra parte, podemos escribir:

   $$-1 = -2a \qquad a = \frac{1}{2}$$

   De lo anterior, se deduce que la expresión queda de la forma:

   $$v = T^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

5. **Obtener la ecuación de dimensiones de la constante de Coulomb a partir de la expresión:**

   $$F = \frac{Kqq'}{r^2}$$

   Solución: Despejando la constante, tendremos:

   $$K = \frac{F \cdot r^2}{q \cdot q'}$$

   La ecuación de dimensiones de F es: $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$, mientras que la de r^2 será: $\left[r^2\right] = L^2$. Si tenemos en cuenta que la carga eléctrica es una magnitud derivada, y que se cumple que:

   $$q = I \cdot t$$

   Donde I es la intensidad, y t el tiempo, tendremos:

   $$[K] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2}{I^2 \cdot T^2} = M \cdot L^3 \cdot T^{-4} \cdot I^{-2}$$

6. **Conocida la ecuación de dimensiones de la constante K, obtenida en el ejemplo anterior, obtener la ecuación de dimensiones del campo eléctrico y del potencial eléctrico, cuyas respectivas expresiones son:**

   $$E = \frac{KQ}{r^2} \qquad y \qquad V = \frac{KQ}{r}$$

   Solución: La ecuación de dimensiones del campo eléctrico será:

   $$[E] = \frac{[K][Q]}{r^2} = \frac{M \cdot L^3 \cdot T^{-4} \cdot I^{-2} \cdot I \cdot T}{L^2} = M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$$

   $$[V] = \frac{[K][Q]}{r} = \frac{M \cdot L^3 \cdot T^{-4} \cdot I^{-2} \cdot I \cdot T}{L} = M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$$

7. **La expresión: $F \cdot l = 4\pi m x^2$, donde F es una fuerza, l una longitud, m una masa, e y una magnitud indeterminada, es dimensionalmente correcta. ¿Cuál es la ecuación de dimensiones de x? ¿Qué magnitud física representa?**

   Solución: De la ecuación anterior podemos deducir:

   $$[F]\,[l] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

   Despejando, tendremos:

   $$x = \sqrt{\frac{F \cdot l}{4\pi m}} \qquad [x] = \left(\frac{[F \cdot l]}{[4\pi m]}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{M \cdot L^2 T^{-2}}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = L \cdot T^{-1}$$

   x tiene, por tanto, dimensiones de velocidad.

8. **Para un fluido, podemos establecer la relación, dimensionalmente correcta: $P^x = Q^y \cdot \rho \cdot S^z$, donde P es la presión, Q el caudal (volumen por unidad de tiempo), ρ la densidad, y S el área. Determinar los valores de x, y y z.**

   Solución: La ecuación de dimensiones para cada uno de los términos de la igualdad es, respectivamente:

   $$[P]^x = \left[\frac{F}{S}\right]^x = \left(\frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2}\right)^x = M^x \cdot L^{-x} \cdot T^{-2x}$$
   $$[Q]^y = \left(\frac{L^3}{T}\right)^y = L^{3y} \cdot T^{-y}$$
   $$[\rho] = M \cdot L^{-3}$$
   $$[S]^z = L^{2z}$$

   Con todo ello, podremos escribir:

   $$M^x \cdot L^{-x} \cdot T^{-2x} = L^{3y} \cdot T^{-y} \cdot M \cdot L^{-3} \cdot L^{2z} = M \cdot L^{3y-3+2z} \cdot T^{-y}$$

   Teniendo en cuenta que: $M^x = M$, tendremos que $\mathbf{x} = \mathbf{1}$. Por otra parte:

   $$T^{-2x} = T^{-2} = T^{-y} \longrightarrow y = 2$$

   $$-x = -1 = 3y - 3 + 2z = 3 + 2z \longrightarrow z = -2$$

9. **El flujo magnético a través de una superficie viene determinado por $\phi = B{\cdot}S\,cos\,\theta$, siendo el ángulo formado por el campo magnético B con la perpendicular a la superficie. Hallar las dimensiones del flujo magnético**.

   Solución: La ecuación de dimensiones de S es: $[S] = L^2$. Las unidades de B se pueden deducir de la fuerza ejercida por un campo magnético sobre un conductor:

   $$\overrightarrow{F} = I\,\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B} \qquad F = I \cdot l \cdot B\,cos\,\alpha$$

   Despejando, tendremos:

   $$B = \frac{F}{I \cdot l\,cos\,\alpha} \qquad [B] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot L} = M \cdot I^{-1} \cdot T^{-2}$$

   Por tanto, tendremos:

   $$[\phi] = [B \cdot S\,cos\,\theta] = M \cdot I^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^2$$

10. **Hallar el valor de a y b, mediante análisis dimensional, en la siguiente expresión:**

    $$T^a = \frac{4\pi^2 r^b}{GM}$$

    Solución: A partir de la Ley de Gravitación Universal:

    $$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

Despejando:

$$G = \frac{F \cdot r^2}{M \cdot m} \qquad [G] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2}{M^2} = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$$

Las ecuaciones de dimensiones para el primer y segundo miembro de la igualdad son, respectivamente:

$$[T^a] = T^a \qquad \left[\frac{4\pi^2 r^b}{GM}\right] = \frac{L^b}{M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2} \cdot M} = L^{(b-3)} \cdot T^2$$

Despejando, tendremos: $b - 3 = 0$; $a = 2$. La expresión toma la forma:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

11. **Dada la fórmula física $K = \dfrac{B^2 \cdot A}{2\,\mu}$, donde es la inducción magnética ($M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$), A es el área, μ es la permeabilidad magnética ($M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}$). Determinar qué magnitud representa K.**

Solución: La ecuación de dimensiones del segundo miembro será:

$$\left[\frac{B^2 \cdot A}{2\,\mu}\right] = \frac{M^2 \cdot T^{-4} \cdot I^{-2} \cdot L^2}{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}} = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

Que corresponde a la ecuación de dimensiones de una fuerza, es decir, $[K] = M \cdot L \cdot T^{-2}$

12. **Hallar el valor de $a\,b\,\text{y}\,c$, y , mediante análisis dimensional, en la siguiente expresión:**

$$v_e = k \cdot G^a \cdot M_p^b \cdot R_p^c$$

Donde k es un valor numérico, G es la constante de la gravitación, M_p es la masa del planeta y R_p es el radio del planeta.

Solución: A partir de la Ley de Gravitación Universal:

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

Despejando:

$$G = \frac{F \cdot r^2}{M \cdot m} \qquad [G] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2}{M^2} = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$$

La ecuación de dimensiones de k, M_p y R_p serán, respectivamente:

$$[k] = 1 \quad [M_p] = M \quad [R_p] = L$$

Aplicando la ecuación de dimensiones en la expresión del enunciado:

$$[v_e] = L \cdot T^{-1} = [k \cdot G^a \cdot M_p^b \cdot R_p^c] = M^{-a} \cdot L^{3a} \cdot T^{-2a} \cdot M^b \cdot L^c = M^{(b-a)} \cdot L^{(3a+c)} \cdot T^{-2a}$$

Igualando exponentes, tendremos:

$$\begin{cases} 0 = b - a \\ 1 = 3a + c \\ -1 = -2a \end{cases}$$

Resolviendo, nos queda: $a = \dfrac{1}{2}$; $b = \dfrac{1}{2}$; $c = -\dfrac{1}{2}$. La expresión que nos da el enunciado es:

$$v_e = k\sqrt{\frac{GM_p}{R_p}}$$

13. **Hallar el valor de a y b , mediante análisis dimensional, en la siguiente expresión**:

$$p = h^a \cdot \lambda^b$$

Donde es la constante de Planck y λ es la longitud de onda del fotón.

Solución: p es una cantidad de movimiento, por lo que su ecuación de dimensiones es: $[p] = M \cdot L \cdot T^{-1}$. La ecuación de dimensiones de λ es: $[\lambda] = L$. Para determinar la ecuación de dimensiones de h, utilizamos la expresión que relaciona la energía de un fotón con su frecuencia: $E = h\nu$. Despejando:

$$[h] = \left[\frac{E}{\nu}\right] = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}{T^{-1}} = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$$

A partir de la expresión dada en el enunciado:

$$M \cdot L \cdot T^{-1} = M^a \cdot L^{2a} \cdot T^{-a} \cdot L^b = M^a \cdot L^{(2a+b)} \cdot T^{-a}$$

Igualando los exponentes del primer miembro a los del segundo:

$$\begin{cases} 1 = a \\ 1 = 2a + b \\ -1 = -a \end{cases}$$

Con lo que tendremos: $a = 1$ y $b = -1$, con lo que la expresión tendrá la forma:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

14. **Hallar el valor de a, b y c mediante análisis dimensional, en la siguiente expresión:**

$$I = E^a \cdot S^b \cdot t^c \quad (1)$$

Donde I es intensidad de una onda, E es energía, S es superficie y t es el tiempo.

Solución: La energía tiene la ecuación de dimensiones de un trabajo, es decir:

$$[E] = [W] = [F][d] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

La ecuaciones de dimensiones de I, S y t son, respectivamente:

$$[I] = \left[\frac{P}{S}\right] = \left[\frac{W}{S \cdot t}\right] = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}{L^2 \cdot T} = M \cdot T^{-3} \qquad [S] = L^2 \qquad [t] = T$$

De la ecuación (1) se deduce:

$$M \cdot T^{-3} = M^a \cdot L^{2a} \cdot T^{-2a} \cdot L^{2b} \cdot T^c = M^a \cdot L^{(2a+2b)} \cdot T^{(c-2a)}$$

Tomando los exponentes de M , L y T en el primer y segundo miembro, tendremos las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = 2a + 2b \\ -3 = c - 2a \end{cases}$$

De donde obtenemos los valores: $a = 1$; $b = -1$ y $c = -1$. la expresión (1) queda en la forma: $I = \dfrac{E}{S \cdot t}$