Ondas estacionarias

Un caso particular de interferencia es el que se produce entre una onda incidente y la onda reflejada. Supongamos una onda armónica que se propaga a través de un medio material, como puede ser una cuerda. La ecuación de la onda es la siguiente:

$$y = A\ \text{sen}(\omega t - kx)$$

Si esta onda llega a un extremo fijo de la cuerda, se reflejará, siendo la ecuación de la onda reflejada:

$$y = -A\ \text{sen}(\omega t + kx)$$

Esta onda interferirá con la primera, obteniéndose, por aplicación del principio de superposición, la siguiente ecuación:

$$y = 2A\ \cos\omega t\ \text{sen}\ kx$$

Lo que constituye la ecuación de una onda estacionaria. Esta ecuación puede también

(a) Onda estacionaria en una cuerda

(b) Onda estacionaria en un muelle

Figura 1: Nodos y antinodos

ponerse de la forma $y = A_r \,\text{sen}\, kx$, donde $A_r = 2A\, cos\, \omega t$

La onda estacionaria se caracteriza porque existen puntos del medio en los que la amplitud de vibración es nula (nodos) y otros en los que la amplitud de vibración es máxima (antinodos o vientres). Este tipo de ondas se produce en cuerdas vibrantes con uno o los dos extremos fijos, y en tubos abiertos por uno o por los dos extremos.

La determinación de la posición de los nodos y antinodos se hará a partir de las siguientes igualdades:

$$2A\,\text{sen}kx = 0 \qquad \text{condición de nodo}$$

$$2A\,\text{sen}kx = 2A \qquad \text{condición de antinodo}$$

Si la cuerda, de longitud L, tiene los dos extremos fijos, se cumplirá que, para x = L, tendremos un antinodo, es decir:

$$2A\,sen\,kL = 0 \qquad por\,lo\,cual \qquad \frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi$$

Despejando la longitud de onda de la igualdad anterior, obtendremos:

$$\boxed{\lambda = \frac{2L}{n}}$$

Es decir, la longitud de onda fundamental y los armónicos se obtendrán dividiendo el doble de la longitud de la cuerda por un número natural. El número de nodos estará relacionado con n por la expresión: nº nodos = n+1.

Si suponemos una cuerda con un extremo libre, este punto tendrá una máxima amplitud, es decir, tendrá la condición de antinodo. Si la longitud de la cuerda es L, podremos poner:

$$2A\ \mathrm{sen} kL = 2A$$

por lo que:

$$\mathrm{sen}\ kL = \mathrm{sen}\frac{2\pi\ L}{\lambda} = 1$$

$$\frac{2\pi\ L}{\lambda} = (2n+1)\ \frac{\pi}{2}$$

con lo que, al despejar, obtenemos la longitud de onda en función del número impar 2 n + 1. Al igual que en el caso de la cuerda con los dos extremos fijos, el número de nodos vendrá dado por n + 1.

$$\boxed{\lambda = \frac{4L}{2n+1}}$$

Es decir, las longitudes de onda vienen dadas por el cociente de cuatro veces la longitud de la cuerda entre un número impar (1, 3, 5...), es decir, aparecen los armónicos impares.

La frecuencia de la onda estacionaria se obtendrá mediante la relación:

$$\nu = \frac{v}{\lambda}$$

por lo que, en el caso de una cuerda con un extremo libre, tendremos:

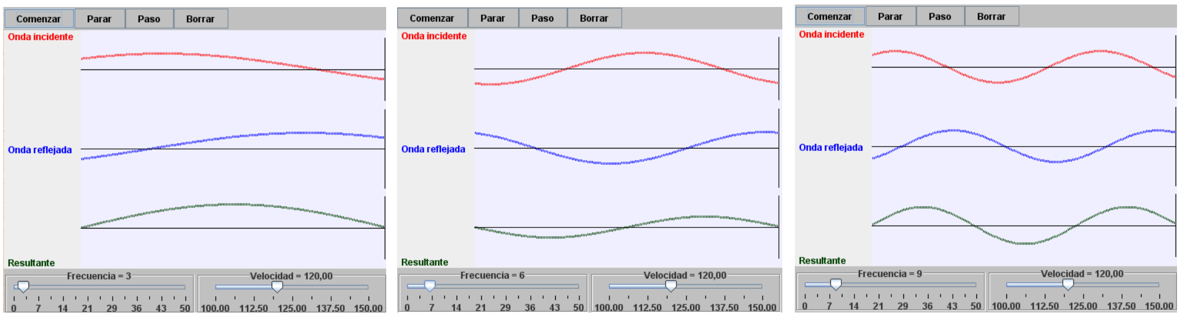
$$\nu = \frac{(2n+1)v}{4L}$$

mientras que para una cuerda con los dos extremos fijos, tendremos:

$$\nu = \frac{nv}{2L}$$

Como consecuencia de lo anterior, veremos que las frecuencias a las que se producen ondas estacionarias son, para una cuerda fija por ambos extremos, múltiplos enteros de la frecuencia fundamental:

$$\nu_0 = \frac{v}{2L}$$



(a) Frecuencia 3 Hz. Dos nodos (b) Frecuencia 6 Hz. Tres nodos (c) Frecuencia 9 Hz. Cuatro nodos

Figura 2: Ondas estacionarias

Como puede verse, la frecuencia depende de la velocidad de la onda, siendo dicha velocidad función de la tensión de la cuerda y de su densidad lineal, de la forma:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

siendo T, la tensión y σ, la densidad lineal de la cuerda.

Un caso particular de las ondas estacionarias es el de aquellas que se producen en un anillo. En este caso, el punto de sujeción del anillo es un nodo, mientras que el extremo opuesto es un antinodo. Las ondas estacionarias formadas presentan un número impar de nodos, que coincide con el de antinodos.