

# PRUEBAS EBAU FÍSICA

Juan P. Campillo Nicolás

17 de septiembre de 2019

## 1. Gravitación.

1. La órbita de Plutón en torno al Sol es elíptica. La relación de distancia entre su afelio y su perihelio es  $5/3$ . Calcule la relación (cociente) entre los valores en el afelio y en el perihelio de las siguientes magnitudes de Plutón: momento angular respecto al centro del Sol, energía cinética y energía potencial gravitatoria.

**Respuesta:**

a) El momento angular respecto al Sol tiene la expresión:  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ , siendo su módulo,  $L = rmv \operatorname{sen} 90$ . El cociente de  $L_a$  y  $L_p$  será:

$$\frac{L_a}{L_p} = \frac{r_a m v_a}{r_p m v_p} = \frac{r_a \sqrt{\frac{GM}{r_a}}}{r_p \sqrt{\frac{GM}{r_p}}} = \sqrt{\frac{r_p}{r_a}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

El cociente de energías cinéticas será:

$$\frac{E_{ca}}{E_{cp}} = \frac{\frac{1}{2} m v_a^2}{\frac{1}{2} m v_p^2} = \frac{\frac{GM}{r_a}}{\frac{GM}{r_p}} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{3}{5}$$

Por último, la relación entre las energías potenciales en el afelio y en el perihelio será:

$$\frac{U_a}{U_p} = \frac{-\frac{GMm}{r_a}}{-\frac{GMm}{r_p}} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{3}{5}$$

2. La nave Apolo 11 permitió la llegada del hombre a la Luna en 1969. Para ello orbitó alrededor de ella con un periodo de 119 minutos y a una distancia media del centro de la Luna de 1850 km. Suponiendo que su órbita fue circular, determine: a) La velocidad orbital del Apolo 11 b) La masa de la Luna. Datos: Constante de gravitación universal,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

**Respuesta:**

a) La velocidad orbital viene expresada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Puesto que  $r$  (distancia media) es un dato conocido, deberemos obtener el valor de  $GM$ , aplicando la Tercera Ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \rightarrow GM = \frac{4\pi^2 (1,85 \cdot 10^6)^3}{(119 \cdot 60)^2} = 4,90 \cdot 10^{12}$$

Sustituyendo, tendremos:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{4,90 \cdot 10^{12}}{1,85 \cdot 10^6}} = 1628 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La masa de la Luna será:

$$M = \frac{GM}{G} = \frac{4,90 \cdot 10^{12}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

3. El planeta Marte es aproximadamente esférico, con un radio  $r_M = 3,39 \cdot 10^6 \text{ m}$  y un valor de la aceleración de la gravedad en su superficie:  $g_M = 3,71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . a) Calcule la densidad media de Marte y la velocidad de escape desde su superficie. b) Calcule a que altura sobre la superficie de Marte, el valor de la gravedad se reduce a la mitad. Dato:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

**Respuesta:**

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es:

$$3,71 = \frac{GM}{r_M^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4}{3} \pi (3,39 \cdot 10^6)^3 d}{(3,39 \cdot 10^6)^2} = \frac{4}{3} \pi 6,67 \cdot 10^{-11} (3,39 \cdot 10^6) d$$

Despejando, obtenemos:

$$d = \frac{3 \cdot 3,71}{4 \cdot \pi 6,67 \cdot 10^{-11} 3,39 \cdot 10^6} = 3917 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

la velocidad de escape es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4}{3} \pi (3,39 \cdot 10^6)^3 3917}{3,39 \cdot 10^6}} = 5014 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La aceleración de la gravedad se reduce a la mitad a una distancia  $r$ , de forma que:

$$\frac{3,71}{2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4}{3} \pi (3,39 \cdot 10^6)^3 3917}{r^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4}{3} \pi (3,39 \cdot 10^6)^3 3917}{3,71}} = 4,79 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La distancia a la superficie es  $h = 4,79 \cdot 10^6 - 3,39 \cdot 10^6 = 1,4 \cdot 10^6 \text{ m}$

4. Fobos es el satélite más grande de Marte. Tiene una masa  $m = 1,072 \cdot 10^{16} \text{ kg}$  y describe una órbita alrededor de Marte, que supondremos circular, a una altura de 5980 km sobre la superficie de Marte. Calcule: a) El periodo de la órbita de Fobos alrededor de Marte. b) Su energía mecánica total (energía cinética más potencial). Datos: Constante de gravitación universal,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ; radio de Marte,  $R_M = 3397 \text{ km}$ ; masa de Marte,  $M_M = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ .

**Respuesta:**

a) El periodo de rotación es:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 [(5,98 + 3,397) 10^6]^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}} = 27570 \text{ s}$$

b) la energía mecánica es:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 1,072 \cdot 10^{16}}{2(5,98 + 3,397) 10^6} = 2,45 \cdot 10^{22} \text{ J}$$

5. a) El cometa Halley describe una órbita elíptica de gran excentricidad en torno al sol. La relación de distancias al sol en el afelio,  $R_a$ , y en el perihelio,  $R_p$ , es  $R_a / R_p = 62$ . Calcule la relación (cociente) entre los valores en el afelio y en el perihelio de las siguientes magnitudes del cometa Halley: momento angular respecto del sol, energía cinética y energía potencial gravitatoria.

**Respuesta:**

El módulo del momento angular es:  $L = rmv$ . Como consecuencia de la 2ª Ley de Kepler, el momento cinético se mantiene constante, por lo que la relación entre los valores de  $L$  en afelio y perihelio es:

$$\frac{L_{af}}{L_{per}} = 1$$

Teniendo en cuenta que  $rv = \text{constante}$ , la relación entre las velocidades en el afelio y en el perihelio es  $1/62$ , por lo que la relación entre las energías cinéticas tiene el valor:

$$\frac{E_{c(af)}}{E_{c(per)}} = \frac{\frac{1}{2}mv_{af}^2}{\frac{1}{2}mv_{per}^2} = \frac{v_{af}^2}{v_{per}^2} = \frac{1}{62^2}$$

Por último, la relación entre las energía potenciales es:

$$\frac{U_{af}}{U_{per}} = \frac{-\frac{2GMm}{r_{af}}}{-\frac{2GMm}{r_{per}}} = \frac{r_{per}}{r_{af}} = \frac{1}{62}$$

6. Una nave espacial de masa  $m = 300 \text{ kg}$  se encuentra en la superficie de Marte. a) Calcule la velocidad de escape de la nave desde la superficie de Marte. Se le comunica a la nave una velocidad vertical inicial de  $4 \text{ km/s}$ . b) Calcule la altura máxima que alcanzará la nave respecto de la superficie de Marte. c) Calcule el peso de la nave a dicha altura. Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ; masa y radio de Marte  $M_M = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ ,  $R_M = 3397 \text{ km}$ .

**Respuesta:**

- a) La velocidad de escape es la siguiente:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{3,397 \cdot 10^6}} = 5021 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{r'}$$

Sustituyendo valores:

$$-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{3,397 \cdot 10^6} + \frac{1}{2}4000^2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{r'}$$

Despejando:  $r' = 9,30 \cdot 10^6 \text{ m}$

- c) La aceleración de la gravedad a esa altura será:

$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{(9,30 \cdot 10^6)^2} = 0,495 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Y el peso del satélite:

$$P = 300 \cdot 0,495 = 148,5 \text{ N}$$

7. Ío y Calisto son dos satélites que orbitan alrededor de Júpiter. Ío tiene un periodo orbital de 1,8 días y el radio de su órbita es 6 veces el radio de Júpiter. El periodo orbital de Calisto es de 16,7 días. Suponiendo que Ío y Calisto describen órbitas circulares, calcule el radio de la órbita de Calisto. Dato: radio de Júpiter,  $R_J=71500$  km.

**Respuesta:**

A partir de los datos de Ío:

$$1,8 \cdot 86400 = \sqrt{\frac{4\pi^2(6 \cdot 7,15 \cdot 10^7)^3}{GM_J}} \quad GM_J = 1,29 \cdot 10^{17} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$$

Con este valor:

$$16,7 \cdot 86400 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{1,29 \cdot 10^{17}}} \quad r = 1,89 \cdot 10^9 \text{ m}$$

8. Caronte es un satélite que orbita alrededor de Plutón con una órbita prácticamente circular de periodo 6,39 días. a) A partir de los datos de Caronte y Plutón, calcule la masa de Plutón. b) Calcule el campo gravitatorio (módulo, dirección y sentido) en el punto medio de la línea que une los centros de Caronte y Plutón. Datos: Constante de gravitación universal,  $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ; masa de Caronte,  $M_C=1,52 \cdot 10^{21}$  kg; distancia Plutón-Caronte,  $r_{PC}=19570$  km.

**Respuesta:**

a) Con los datos de Caronte:

$$6,39 \cdot 86400 = \sqrt{\frac{4\pi^2(1,957 \cdot 10^7)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} M_P}} \quad M_P = 1,33 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

b) El vector campo gravitatorio se encontrará en la dirección que une Plutón con Caronte, siendo el sentido el de Plutón, debido a su mayor masa. El módulo de dicho campo será:

$$g = \frac{GM_P}{(r/2)^2} - \frac{GM_C}{(r/2)^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11}}{(9,785 \cdot 10^6)^2} (1,33 \cdot 10^{22} - 1,52 \cdot 10^{21}) = 8,21 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

9. Un satélite de masa 350 kg describe órbitas circulares alrededor de la Tierra a una altura de 630 km sobre la superficie. a) ¿Cuánto vale la aceleración centrípeta del satélite? ¿Cuál es su período orbital? b) ¿Cuánto vale la intensidad del campo gravitatorio creado por la Tierra a esta altura? c) ¿Cuál es la energía mecánica del satélite? Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $M_{Tierra}=5,98 \cdot 10^{24}$  kg;  $R_{Tierra} = 6,37 \cdot 10^6$  m.

**Respuesta:**

a) El radio de la órbita será:  $r = 6,3 \cdot 10^5 + 6,37 \cdot 10^6 = 7 \cdot 10^6$  m. La velocidad orbital tendrá el valor:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^6}} = 7548,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por lo que la aceleración centrípeta será:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{7548,6^2}{7 \cdot 10^6} = 8,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El periodo orbital tendrá el valor:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7 \cdot 10^6}{7548,6} = 5827 \text{ s}$$

b) La intensidad del campo gravitatorio creado por la Tierra a esa altura **tendrá el mismo valor que la aceleración de la gravedad a esa altura**. Como comprobación:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(7 \cdot 10^6)^2} = 8,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

c) La energía mecánica será:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 350}{2 \cdot 7 \cdot 10^6} = -9,97 \cdot 10^9 \text{ J}$$

10. Júpiter es el objeto más másico del sistema solar después del Sol. Su órbita alrededor del Sol se puede considerar circular, con un periodo de 11,86 años. Determinar: a) La distancia de Júpiter al Sol y la velocidad de Júpiter en su órbita alrededor del Sol. b) La energía cinética y potencial de Júpiter. Datos: masa de Júpiter  $M_{Júpiter} = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ , masa del Sol  $M_{Sol} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ , constante de la gravitación universal  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ .

**Respuesta:**

a) A partir de la tercera ley de Kepler, podemos despejar el radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} (11,86 \cdot 365 \cdot 86400)^2}{4\pi^2}} = 7,79 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

La velocidad de la órbita es:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{7,79 \cdot 10^{11}}} = 13086,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Las energía cinética y potencial son, respectivamente:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1,9 \cdot 10^{27}}{2 \cdot 7,79 \cdot 10^{11}} = 1,63 \cdot 10^{35} \text{ J}$$

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1,9 \cdot 10^{27}}{7,79 \cdot 10^{11}} = -3,36 \cdot 10^{35} \text{ J}$$

11. a) ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa  $m$  situada a una distancia  $r$  de otra partícula de masa  $M$ ? El 4 de octubre de 1957 se lanzó al espacio el primer satélite artificial, el Sputnik, que describió una órbita a 586 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Suponiendo que esta órbita era circular y sabiendo que la masa del Sputnik era 83,6 kg, calcule: a) El período de rotación del satélite en la órbita que describió alrededor de la Tierra y la velocidad a la que iba el Sputnik. b) La intensidad del campo gravitatorio en su órbita y la energía mecánica del satélite. Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $M_{Tierra} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_{Tierra} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

**Respuesta:**

La energía potencial gravitatoria es:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

a) El periodo se puede calcular aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (6,37 \cdot 10^6 + 5,86 \cdot 10^5)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 5772 \text{ s}$$

La velocidad es:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi (6,37 \cdot 10^6 + 5,86 \cdot 10^5)}{5772} = 7572 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

12. a) La Tierra y Venus describen órbitas en torno al Sol, siendo el radio medio de la órbita de Venus 0,72 veces el radio orbital de la Tierra. Suponiendo válida la aproximación de órbitas circulares, calcule la duración del año 'venusiano'. b) Determine la relación de las velocidades orbitales y el cociente entre los momentos angulares de la Tierra y de Venus, con respecto al centro del Sol. Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .  $M_{Tierra} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $M_{Venus} = 4,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , año terrestre = 365 días.

**Respuesta:**

a) Aplicando a ambos planetas la tercera ley de Kepler, y dividiendo un periodo entre el otro:

$$\frac{T_{Tierra}}{T_{Venus}} = \sqrt{\frac{\frac{4\pi^2 r_T^3}{GM}}{\frac{4\pi^2 r_V^3}{GM}}} = \sqrt{\frac{r_T^3}{(0,72 \cdot R_T)^3}} = 1,64$$

Con lo que el año venusiano será **1,64 veces inferior** al de la Tierra, es decir  $365/1,64 = \mathbf{222,656 \text{ días}}$ .

b) La relación entre las velocidades orbitales es:

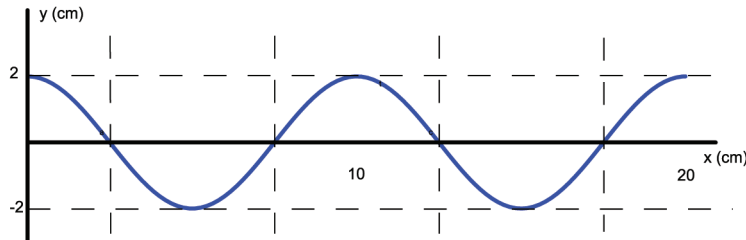
$$\frac{v_{Tierra}}{v_{Venus}} = \frac{\frac{2\pi r_T}{T_t}}{\frac{2\pi r_V}{T_V}} = \frac{T_V \cdot r_T}{T_T \cdot r_V} = \frac{1}{1,64 \cdot 0,72} = \mathbf{0,85}$$

El cociente entre los momentos angulares es:

$$\frac{L_T}{L_V} = \frac{r_T m_T v_T}{r_V m_V v_V} = \frac{0,85 \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{0,72 \cdot 4,87 \cdot 10^{24}} = \mathbf{1,45}$$

## 2. Vibraciones y ondas.

1. Por una cuerda tensa se propaga, en el sentido positivo del eje  $x$ , una onda armónica transversal. Los puntos de la cuerda oscilan con una frecuencia  $f = 4$  Hz. En la gráfica se representa la posición de los puntos de la cuerda en el instante  $t = 0$ . a) Determine la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda. b) Escriba la función de onda correspondiente, en unidades S.I. c) Calcule la máxima velocidad de oscilación trasversal de los puntos de la cuerda.



### Respuesta:

- a) La longitud de onda (distancia entre dos puntos consecutivos en el mismo estado de vibración será, observando la imagen, de 10 cm, mientras que la velocidad de propagación será:

$$v = \frac{\lambda}{T} = v \cdot \nu = 0,1 \cdot 4 = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) La función de onda viene expresada por:

$$y = A \text{ sen}(\omega t - kx + \varphi_0) = 0,02 \text{ sen}(8\pi t - 20\pi x)$$

- c) La velocidad transversal es:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0,02 \cdot 8\pi \cos(8\pi t - 20\pi x) \rightarrow v_y(\text{máx}) = 0,16\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Una partícula describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje  $x$ , de amplitud  $A = 2$  m, frecuencia angular  $\omega = 2$  rad  $\cdot$  s $^{-1}$  y fase inicial nula. a) Determine la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo. b) Calcule la energía cinética y la energía potencial de la partícula en función del tiempo. Represente la energía cinética para dos periodos de oscilación completos. Datos: Masa de la partícula: 100 g.

### Respuesta:

- a) La ecuación del MAS es:

$$x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) = 2 \text{ sen } 2t$$

Mientras que su velocidad tendrá el valor:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = 4 \cos 2t$$

- b) La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 16 \cos^2 2t = 0,8 \cos^2 2t$$



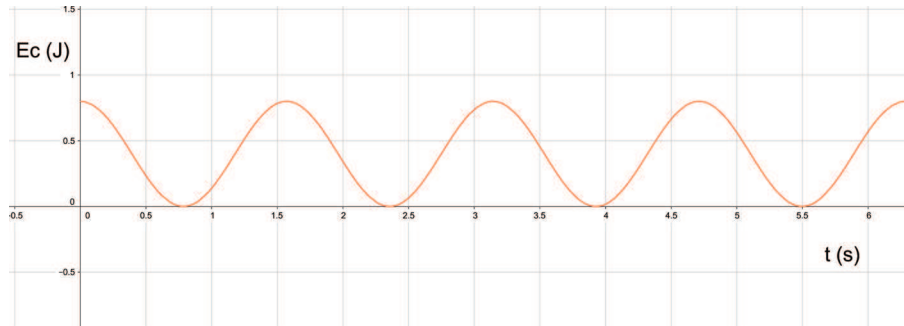
La energía potencial es:

$$U = \frac{1}{2} Kx^2$$

Siendo:  $K = m\omega^2 = 0,1 \cdot 4 = 0,4$ . Así pues, U será:

$$U = \frac{1}{2} 0,4 \cdot 4 \text{ sen}^2 2t = 0,8 \text{ sen}^2 2t$$

La representación gráfica de la energía cinética en función del tiempo para dos periodos completos sería la siguiente:



3. Considere una cuerda de  $L = 1,5$  m con ambos extremos fijos. Cuando se excita transversalmente con una frecuencia  $\nu = 100$  Hz se forma una onda estacionaria con dos vientres. a) calcule la longitud de onda y la velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda. b) ¿Para que frecuencia inferior a la dada se formará onda estacionaria en la cuerda?

**Respuesta:**

a) Para una onda estacionaria, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

Puesto que la onda posee dos vientres, la onda estacionaria formada corresponde al segundo armónico (considerando el valor  $n = 1$  como el correspondiente al primer armónico o  $\lambda$  fundamental), con lo cual, tendremos que:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1,5}{2} = 1,5 \text{ m}$$

La velocidad de propagación se obtiene de la expresión:  $v = \lambda \cdot \nu = 1,5 \cdot 100 = 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b) Para  $n = 1$ , la frecuencia será:

$$\nu_0 = \frac{v}{2L} = \frac{150}{3} = 50 \text{ Hz}$$

Como puede verse, la frecuencia de 100 Hz es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental,  $\nu_0$ .

4. Un bloque de masa  $M = 0,4$  kg desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento sujeto al extremo de un muelle horizontal. La amplitud del movimiento es  $A = 20$  cm y la elongación en el instante inicial es  $x = -20$  cm. La energía total es 2 J. Calcule: a) La constante elástica del resorte. b) La función que describe el movimiento del bloque.

**Respuesta:**

a) A partir de la energía del sistema:

$$E = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

Y sabiendo, además, que cuando  $x = \pm A$ ,  $v = 0$ , por lo cual :

$$E = \frac{1}{2}KA^2 \quad 2 = \frac{1}{2}K(-0,2)^2 \quad K = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) El movimiento del bloque viene descrito por una ecuación del tipo:  $x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0)$ , siendo  $A = 0,2 \text{ m}$  y  $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{100}{0,4}} = 15,81 \text{ s}^{-1}$  por otra parte, puesto que para  $t = 0$ ;  $x = -0,2 \text{ m}$ , tendremos:

$$-0,2 = 0,2 \text{ sen}\varphi_0 \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Con lo que, finalmente, la ecuación del movimiento quedará así:  $x = 0,2 \text{ sen}\left(15,81t - \frac{\pi}{2}\right)$

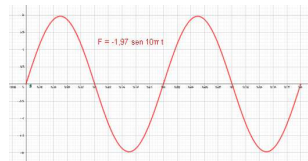
5. Una partícula de masa  $m = 10 \text{ g}$  oscila armónicamente a lo largo del eje OX en la forma  $x = A \text{ sen}$ , con  $A = 0,2 \text{ m}$  y  $\omega = 10\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . a) Determine y represente gráficamente la fuerza que actúa sobre la partícula en función del tiempo para dos periodos completos de la oscilación. b) Calcule la energía mecánica de la partícula. c) Determine y represente gráficamente la energía cinética de  $m$  en función del tiempo para dos periodos completos de la oscilación.

**Respuesta:**

a) La ecuación del movimiento será:  $x = 0,2 \text{ sen } 10\pi t$ , con lo que la fuerza tendrá el valor:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = 0,01 (-20\pi^2 \text{ sen } 10\pi t) = -1,97 \text{ sen } 10\pi t$$

Cuya representación gráfica será:



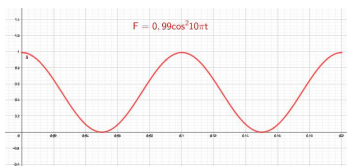
b) La energía mecánica total será:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}0,01(10\pi)^20,2^2 = 0,0197 \text{ J}$$

c) La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2}0,01 \left[ \frac{d(0,2 \text{ sen } 10\pi t)}{dt} \right]^2 = 0,99 \cos^2 10\pi t$$

Y su representación gráfica:



6. Un altavoz emite en el espacio con una potencia de  $1 \text{ W}$  uniformemente distribuida en todas las direcciones. ¿Qué intensidad acústica (medida en dB) recibirá un detector situado a  $1 \text{ m}$  de distancia

del altavoz? ¿A qué distancia habrá que poner el detector para que detecte la mitad de intensidad acústica? Dato: Intensidad umbral del oído humano  $I_0=10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

**Respuesta:**

a) La intensidad a 1 m de distancia será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1}{4\pi r^2} = 7,96 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Y el nivel de intensidad:

$$\beta = 10 \log \frac{7,96 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}} = 109 \text{ dB}$$

Para que el nivel de intensidad se haga la mitad, tendremos:

$$54,5 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \quad I = 2,82 \cdot 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} = \frac{1}{4\pi r^2}$$

La distancia r será:

$$r = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 2,82 \cdot 10^{-7}}} = 531 \text{ m}$$

7. Tenemos un tubo de longitud  $L = 1,7 \text{ m}$  que tiene los dos extremos abiertos a la atmósfera. a) Calcule las dos frecuencias de excitación sonora más bajas que producirán ondas estacionarias en el tubo. b) Represente para cada una de las frecuencias anteriores la onda estacionaria que se forma en el tubo, señalando la posición de los nodos y vientres que aparecen. Dato: velocidad del sonido en el aire,  $v = 340 \text{ m/s}$ .

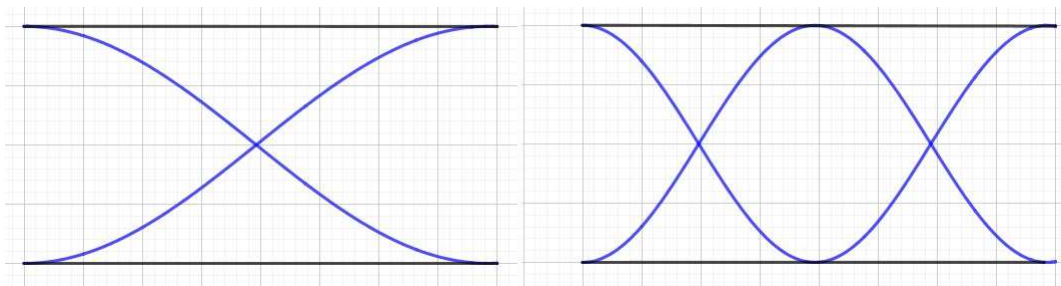
**Respuesta:**

a) El valor de la frecuencia para un tubo abierto por ambos extremos es:

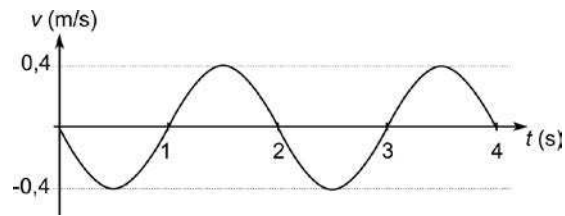
$$\nu = \frac{nv}{2L}$$

Por lo que las frecuencias más bajas serán:  $\nu_1 = \frac{340}{2 \cdot 1,7} = 100 \text{ Hz}$  y  $\nu_2 = \frac{2 \cdot 340}{2 \cdot 1,7} = 200 \text{ Hz}$

b)



8. Una masa  $m = 100 \text{ g}$  oscila armónicamente colgada del extremo de un muelle. La velocidad de la masa en función del tiempo se representa en la gráfica. a) Determine la amplitud y la frecuencia de dicha oscilación. Calcule la constante elástica  $K$  del muelle. b) Escriba la función  $x(t)$  que describe la posición de la masa respecto de la posición de equilibrio. Represente gráficamente  $x(t)$  para dos periodos completos de oscilación.

**Respuesta:**

a) La ecuación de la velocidad es:

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

El periodo es de 2 s, con lo que  $\omega = 2\pi/T = \pi \text{ s}^{-1}$ . Por otra parte,  $A\omega = 0,4$ , por lo que  $A = \frac{0,4}{\pi} \text{ m}$ . Puesto que para  $t = 0$ ,  $v$  valdrá 0, tendremos:

$$0 = 0,4 \cos \varphi_0 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

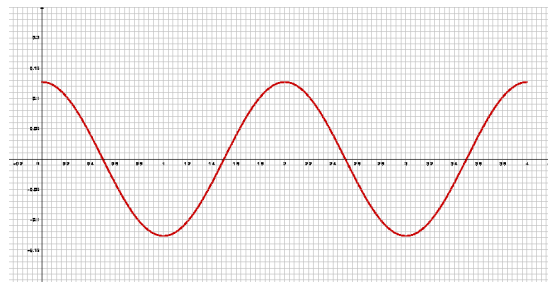
La constante elástica del muelle será:

$$K = m\omega^2 = 0,1 \cdot \pi^2 = 0,99 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) La función que describe la posición de la masa en función de la posición de equilibrio será:

$$x(t) = \frac{0,4}{\pi} \text{ sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

La representación gráfica sería la siguiente:



9. Una masa  $m = 0,3 \text{ kg}$  situada en un plano horizontal sin rozamiento y unida a un muelle horizontal, describe un movimiento vibratorio armónico. Su energía cinética máxima es de 15 J. a) Si se sabe que entre los dos puntos del recorrido de la masa en los que tiene velocidad nula hay una distancia de 50 cm, calcule la amplitud, la frecuencia angular (o pulsación) y el periodo del movimiento y la constante elástica del muelle. b) Calcule la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante  $t = 3 \text{ s}$ , teniendo en cuenta que cuando  $t = 0 \text{ s}$  la masa tiene la energía cinética máxima y se mueve según el sentido positivo del eje  $x$ .

**Respuesta:**

a) En los extremos del movimiento armónico la velocidad es nula, por lo que la distancia de 50 cm corresponde al doble de la amplitud, siendo ésta:  $A = 0,25 \text{ m}$ . teniendo en cuenta que la energía del movimiento armónico es:  $E = \frac{1}{2}KA^2$ , despejando el valor de  $K$ , tendremos:

$$K = \frac{2E}{A^2} = \frac{2 \cdot 15}{0,25^2} = 480 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Para calcular la pulsación, tendremos:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{480}{0,3}} = 40 \text{ s}^{-1}$$

El periodo será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40} = 0,157 \text{ s}$$

b) Las expresiones de posición, velocidad y aceleración son, respectivamente:

$$x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = A \omega \text{ cos}(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -A \omega^2 \text{ sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Según el enunciado, para  $t = 0$ ,  $x = 0$  (punto de máxima energía cinética) y  $v > 0$ , por lo que:

$$0 = A \text{ sen}\varphi_0 \quad \text{y} \quad A \omega \text{ cos}\varphi_0 > 0 \quad \varphi_0 = 0$$

Sustituyendo  $t$  por  $3 \text{ s}$ , tendremos:

$$x = 0,25 \text{ sen}(120) = 0,145 \text{ m}$$

$$v = 10 \text{ cos}(120) = 8,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

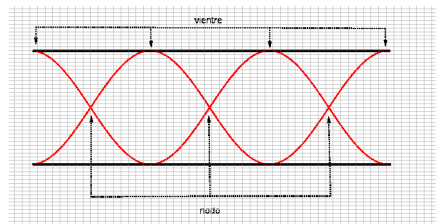
$$a = -400 \text{ sen}(120) = -232,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

10. Considere un tubo de órgano lleno de aire, abierto por sus dos extremos en el que se generan ondas estacionarias. a) Se comprueba que en su tercer armónico el aire vibra con una frecuencia de 510 Hz. ¿Cuál es la longitud del tubo? Dibuje el perfil de la onda estacionaria, indicando la posición de nodos y vientres. b) Si la nota se toca con una potencia  $P = 10 \text{ W}$  y produce a una distancia de 1 m una intensidad sonora determinada. ¿En cuántos decibelios aumenta esta intensidad sonora a la misma distancia si se toca la nota con una potencia  $2P$ ? Dato:  $v_{\text{sonido}} = 340 \text{ m/s}$ .

**Respuesta:**

a) Denominando primer armónico a la frecuencia fundamental ( $n = 1$ ), y teniendo en cuenta que las frecuencias de vibración en un tubo abierto por ambos extremos responden a la expresión:

$$\nu = \frac{nv}{2L} \quad 510 = \frac{3 \cdot 340}{2L} \quad L = 1 \text{ m}$$



b) Puesto que la intensidad responde a la expresión:

$$I = \frac{P}{S}$$

Veremos que, cuando la potencia se duplica, la intensidad percibida a la misma distancia también lo hace. Por tanto, podemos escribir:

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \beta_2 = 10 \log \frac{2I}{I_0} = \beta_1 + 10 \log 2 = 3 \text{ dB}$$

Es decir, el nivel de intensidad se ha incrementado en 3 dB cuando la potencia se ha duplicado.

11. Un muelle de constante  $k = 125 \text{ N/m}$  tiene un extremo fijo y, en el otro, se sujeta una masa  $m = 200 \text{ g}$  que puede deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Alargando el muelle se desplaza la masa 12 cm de la posición de equilibrio, y a continuación se suelta. Determine: a) El periodo y la frecuencia angular (o pulsación) del movimiento armónico resultante. Escriba también la ecuación del movimiento tomando como  $t = 0$  el instante en el que se ha soltado la masa. b) La velocidad máxima de la masa y los valores máximos de la energía cinética y potencial alcanzados durante el movimiento.

**Respuesta:**

a) La frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{125}{0,2}} = 25 \text{ s}^{-1}$$

El periodo será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{25} = 0,25 \text{ s}$$

La ecuación del movimiento es del tipo:  $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ . Teniendo en cuenta que  $A = 0,12 \text{ m}$  y que para  $t = 0 \text{ s}$ ,  $x = 0 \text{ m}$ , tendremos:

$$0 = 0,12 \sin(\varphi_0) \quad \varphi_0 = 0$$

$$x = 0,12 \sin 25t$$

b) Aplicando la conservación de la energía, tendremos:

$$\frac{1}{2} KA^2 = E_c + U$$

La velocidad máxima de la masa se dará cuando  $U = 0$ , es decir:

$$\frac{1}{2} KA^2 = \frac{1}{2} mv^2 \quad v = \sqrt{\frac{KA^2}{m}} = 25 \cdot 0,12 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Los valores máximos de  $E_c$  y  $U$  se darán, respectivamente, cuando  $U = 0$  y  $v = 0$ , por lo que ambos valores máximos tendrán el mismo valor,  $\frac{1}{2} 125 \cdot 0,12^2 = 0,9 \text{ J}$

12. Las cuerdas de una guitarra vibran entre dos puntos fijos. Considere que la cuerda de una guitarra mide 0,65 m de longitud y vibra con una frecuencia fundamental de 440 Hz. a) ¿Cuál es la longitud de onda del armónico fundamental? Calcule la velocidad de propagación de las ondas que, por superposición, han generado la onda estacionaria de la cuerda. b) Calcule la frecuencia del segundo armónico y dibuje el perfil de su onda estacionaria indicando en qué posiciones de la cuerda se localizan nodos y vientres.

**Respuesta:**

a) La longitud de onda en una onda estacionaria es:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{para la onda fundamental: } \lambda = \frac{2 \cdot 0,65}{1} = 1,30 \text{ m}$$

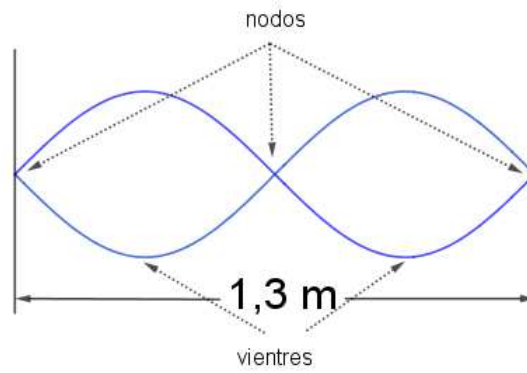
La frecuencia está relacionada con la longitud de onda de la forma:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad \text{con lo que: } v = 1,30 \cdot 440 = 572 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La frecuencia del segundo armónico es doble que la del fundamental, como podemos comprobar de la forma:

$$\nu_2 = \frac{nv}{2L} = \frac{2 \cdot 572}{1,30} = 880 \text{ Hz}$$

La representación gráfica es la siguiente:



### 3. Óptica.

1. Una lámina de aceite (índice de refracción  $n = 1,47$ ) de caras planas y paralelas y espesor  $d$  se encuentra entre el aire y el agua. Un rayo de luz monocromática de frecuencia  $f = 5 \cdot 10^{14}$  Hz incide desde el agua en la lámina. a) Determine las longitudes de onda del rayo en el agua y en el aceite. b) Calcule el ángulo de incidencia en la superficie de separación agua-aceite a partir del cual se produce reflexión total interna en la superficie de separación aceite-aire.) Datos: Índice de refracción del agua,  $n_{agua} = 1,33$ ; índice de refracción del aire,  $n_{aire} = 1$ ; velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**Respuesta:**

- a) la longitud de onda es el cociente de la velocidad entre la frecuencia. De esta forma, tendremos

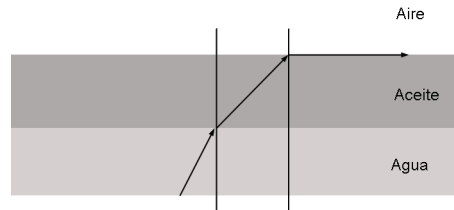
$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 / 1,33}{5 \cdot 10^{14}} = 4,51 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad \lambda_{aceite} = \frac{v_{aceite}}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 / 1,47}{5 \cdot 10^{14}} = 4,08 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

- b) Aplicando la Ley de Snell:

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1,47} \rightarrow \alpha_i = 42,84^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha_{agua}}{\sin 42,84^\circ} = \frac{1,33}{1,47} \rightarrow \alpha_{agua} = 37,97^\circ$$

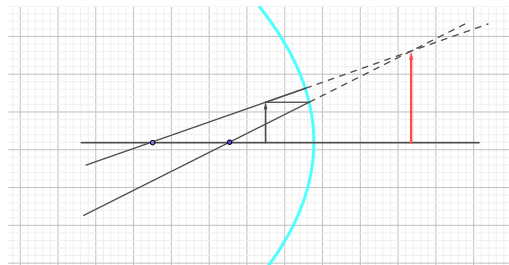
La trayectoria del rayo luminoso puede ser representada de la siguiente forma:



2. Deseamos utilizar un espejo para observar una pequeña imperfección de nuestra piel. Queremos que la imagen sea virtual, derecha y 5 veces más grande. Si colocamos la cara a 25 cm del espejo. a) ¿Qué tipo de espejo debemos emplear: convexo, cóncavo o plano? Justifique su elección mediante un trazado de rayos. b) Determine la posición de la imagen y el radio de curvatura del espejo.

**Respuesta:**

- a) El espejo debe ser cóncavo, pues un espejo convexo da una imagen que siempre es menor que el objeto. El diagrama de rayos para un objeto cóncavo es el siguiente:





b) A partir de la expresión:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad \frac{5y}{y} = -\frac{s'}{-0,25} \quad s' = 1,25 \text{ m}$$

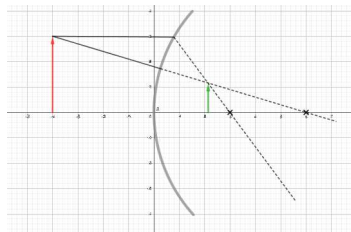
El radio de curvatura se deduce de:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad \frac{1}{-0,25} + \frac{1}{1,25} = \frac{2}{R} \quad R = -0,625 \text{ cm}$$

3. Los espejos de garaje producen siempre una imagen derecha de los objetos, independientemente de su posición respecto del espejo. a) ¿Qué tipo de espejo es, convexo o cóncavo? Justifique su respuesta mediante trazado de rayos. b) Calcule el radio de curvatura de un espejo que permite observar la imagen de un coche, colocado a 3 m de distancia delante del espejo, con la mitad de tamaño que el objeto.

**Respuesta:**

a) Los espejos convexos producen siempre una imagen derecha, menor y virtual de un objeto, independientemente de su posición. El diagrama de rayos será el siguiente:



b) A partir de la expresión del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = \frac{0,5y}{y} \quad s' = -0,5s = 1,5 \text{ m}$$

Aplicando la ecuación de los espejos curvos:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad \frac{1}{-3} + \frac{1}{1,5} = \frac{2}{R} \quad R = 6 \text{ m}$$

4. La lente de una máquina fotocopidora se utiliza para capturar la imagen de una hoja situada a 20 cm de distancia de la lente, de forma que la imagen que se forma sobre el sensor de la fotocopidora es invertida y del mismo tamaño que el objeto. a) ¿A qué distancia del objetivo debemos colocar el sensor? Calcule la focal imagen que debe tener la lente. ¿Debe ser una lente convergente o divergente? b) Compruebe gráficamente los resultados mediante un trazado de rayos.

**Respuesta:**

a) Teniendo en cuenta las características de la imagen y la expresión del aumento lateral:

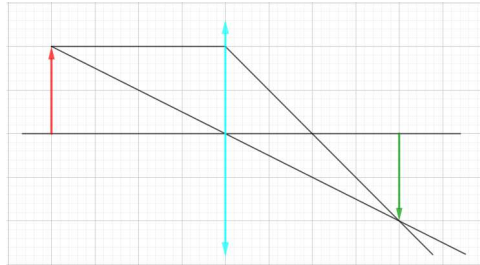
$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad \frac{-y}{y} = \frac{s'}{-0,20} \quad s' = 0,20 \text{ m}$$

Para calcular la distancia focal:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{-0,20} - \frac{1}{0,20} = \frac{1}{f} \quad f = -0,1 \text{ m}$$

La lente debe ser **convergente**, pues una lente divergente nunca produce una imagen real.

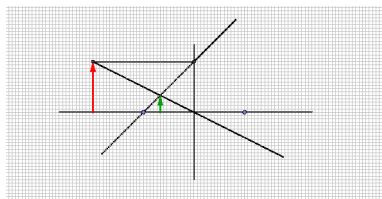
b) El diagrama de rayos es el siguiente:



5. Determine la posición y tamaño de la imagen de un objeto de 1 cm de altura cuando se coloca a 1 m de una lente de potencia -2 dioptrías. Compruebe gráficamente sus resultados mediante un trazado de rayos.

**Respuesta:**

El diagrama de rayos es el siguiente: a)



Aplicando la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -P \quad \frac{1}{-1} - \frac{1}{s'} = 2$$

$$s' = -0,33 \text{ m}$$

El tamaño de la imagen será:

$$y' = y \frac{s'}{s} = 1 \frac{-0,33}{-1} = 0,33 \text{ cm}$$

6. Cuando colocamos un objeto de 1 cm de altura a 12 cm de un espejo esférico cóncavo se forma una imagen virtual a 24 cm del espejo. a) ¿Qué tamaño tendrá la imagen? Calcule el radio de curvatura del espejo y su distancia focal. b) Dibuje el trazado de rayos correspondiente a la situación descrita.

**Respuesta:**

a) El tamaño de la imagen se obtiene de la igualdad:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad y' = -1 \frac{24}{-12} = 2 \text{ cm}$$

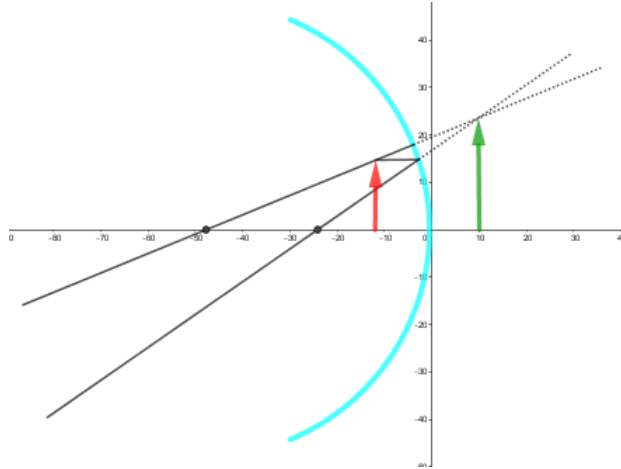
Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad \frac{1}{-0,12} + \frac{1}{0,24} = \frac{2}{R} \quad R = -0,48 \text{ m}$$

La distancia focal es:

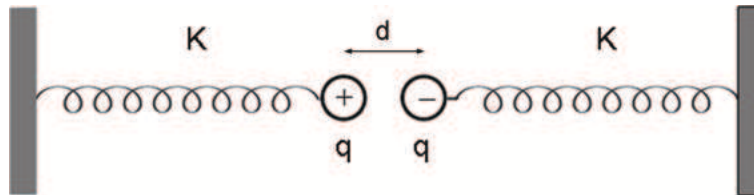
$$f = \frac{R}{2} = -0,24 \text{ m}$$

b) El diagrama de rayos es el siguiente:



#### 4. Electromagnetismo.

1. Disponemos de un sistema para medir la carga eléctrica compuesto por dos muelles de constante elástica  $k = 10 \text{ N/m}$  que tienen en sus extremos unas pequeñas esferas. Cuando las esferas están descargadas se encuentran en contacto y los muelles en su longitud natural. Cuando cargamos las esferas con la misma carga, se separan una distancia de 10 cm. Calcule la carga de las esferas. Datos:  $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$ .



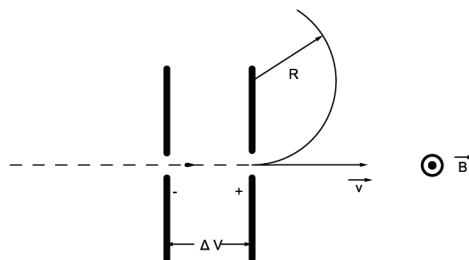
**Respuesta:**

- a) Cuando las dos esferas tienen la misma carga eléctrica, se repelerán. Cada una de ellas se separa 5 cm de la posición inicial de equilibrio, cumpliéndose entonces:

$$\frac{Kq^2}{r^2} = kx \rightarrow \frac{9 \cdot 10^9 q^2}{0,05^2} = 10 \cdot 0,05$$

$$q = \sqrt{\frac{10 \cdot 0,05 \cdot 0,1^2}{9 \cdot 10^9}} = 7,45 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

2. Un electrón de velocidad inicial nula es acelerado mediante un campo eléctrico entre dos placas entre las que existe una diferencia de potencial  $\Delta V = 500 \text{ V}$ . Después penetra en una región donde existe un campo magnético perpendicular a  $\vec{v}$  y de intensidad  $B = 10^{-3} \text{ T}$ . Calcula la velocidad  $v$  que tiene el electrón al pasar por la segunda placa y el radio  $R$  de la trayectoria que describe en la región de campo  $B$ . Datos: Carga del electrón:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ; masa del electrón  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .



**Respuesta:**

- a) El electrón, acelerado por una diferencia de potencial de 500 V, adquiere una energía:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = q\Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 500 = 8 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

La velocidad será, por tanto:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-17}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,33 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

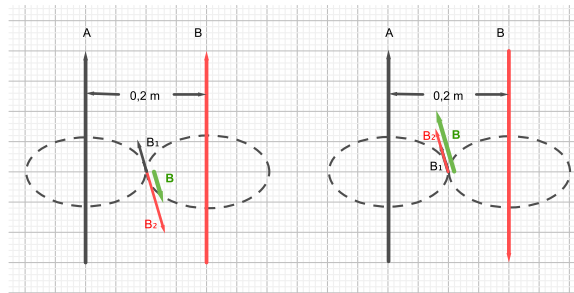
b) El radio de la trayectoria descrita bajo la acción del campo magnético es:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,33 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 0,076 \text{ m}$$

3. Dos conductores rectilíneos, verticales y paralelos, A a la izquierda, y B a la derecha, distan entre si 20 cm. Por ellos circulan corrientes  $I_A$  e  $I_B$  ( $I_A > I_B$ ). Cuando las corrientes circulan en el mismo sentido, el campo magnético en el punto central entre ambas corrientes es de 4 nT, mientras que cuando circulan en sentidos opuestos, el campo magnético en dicho punto es de 8 nT. a) Dibuje un esquema del campo creado por cada corriente, y del campo total para cada uno de los casos indicados (mismo sentido y sentido opuesto de las corriente). b) Calcule el valor de  $I_A$  e  $I_B$ . Datos:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{C}^{-2}$ .  $1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{ T}$ .

**Respuesta:**

a) La representación gráfica puede ser la siguiente:



b) En el primer caso, tendremos:

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \cdot 0,1} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \cdot 0,1} = 4 \cdot 10^{-9}$$

Mientras que, en el segundo caso:

$$B = B_2 + B_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \cdot 0,1} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \cdot 0,1} = 8 \cdot 10^{-9}$$

Podemos plantear el sistema:

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= 4 \cdot 10^{-9} \\ B_2 + B_1 &= 8 \cdot 10^{-9} \end{aligned} \right\}$$

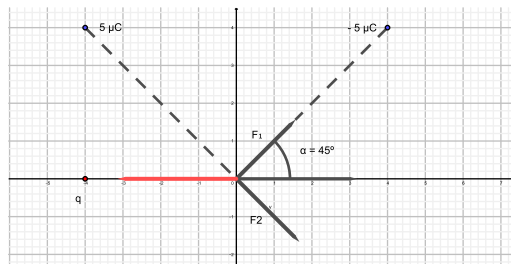
Obteniéndose así:  $B_2 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ T}$  y  $B_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ T}$ . Las respectivas intensidades se calculan así:

$$I_1 = \frac{2\pi \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 10^{-3} \text{ A} \quad I_2 = \frac{2\pi \cdot 0,1 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

4. Tres partículas cargadas  $q_1 = 5 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -5 \mu\text{C}$  y  $q$ , de carga desconocida, están situadas en los puntos de coordenadas  $q_1: (-1, 1)$ ;  $q_2: (1, 1)$  y  $q_3: (-1, 0)$ , expresadas en metros. a) Determine el valor de la carga  $q$  para que una carga  $Q$  situada en el origen de coordenadas no experimente ninguna fuerza neta. b) Con el valor de  $q_3$  obtenido en el apartado anterior, calcule el potencial electrostático en el origen debido a las tres cargas. Datos:  $K = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ .  $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$ .

**Respuesta:**

a) El sistema de partículas se puede representar así:



De la representación gráfica se deduce que las componentes verticales de  $F_1$  y  $F_2$  se anulan, siendo además iguales los módulos de ambas (que llamaremos  $F$ ). Entonces, el módulo de la resultante de ambas fuerzas será:  $F_r = 2 F \cos 45^\circ$ , siendo:

$$F = 2 \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} Q}{2} \cos 45^\circ$$

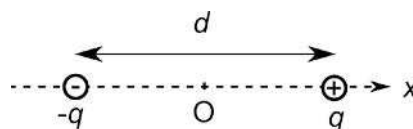
La fuerza  $F_3$  será igual, en módulo a la anterior resultante, es decir:

$$\frac{9 \cdot 10^9 \cdot Q \cdot q}{1} = 2 \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} Q}{2} \cos 45^\circ \quad \frac{q}{1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \sqrt{2}}{2} \quad q = 3,53 \cdot 10^{-6} C$$

b) El potencial en el origen será:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^6}{\sqrt{2}} + \frac{9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^6)}{\sqrt{2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3,53 \cdot 10^{-6}}{1} = 3,177 \cdot 10^4 V$$

5. Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas iguales, pero de signos contrarios. En la figura se muestra un dipolo cuyas cargas, separadas una distancia  $d$ , se colocan sobre el eje  $x$  simétricamente respecto al origen de coordenadas. Determine el campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) y el potencial en el origen de coordenadas. Datos:  $K=1/(4\pi\epsilon_0)=9 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$ ,  $q = 1 \mu\text{C}$ ,  $d=1 \text{ mm}$ ,  $1 \mu\text{C}=10^{-6} \text{ C}$ .



### Respuesta:

De la anterior representación gráfica se deduce que, en el origen de coordenadas, el campo creado por cada una de las cargas tiene el mismo módulo, dirección y sentido, en este caso, el sentido negativo del eje  $X$ . Por tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -2 \frac{Kq}{(d/2)^2} \vec{i} = -2 \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{(10^{-3}/2)^2} = -7,2 \cdot 10^{10} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

En el origen de coordenadas, el potencial creado es **cero**, pues el potencial creado por cada una de las cargas tiene el mismo valor que el de la otra, pero sentido contrario:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Kq}{d/2} + \frac{K(-q)}{d/2} = 0$$

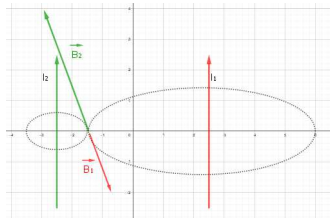
6. Dos hilos conductores rectos, paralelos y de longitud infinita se encuentran separados una distancia  $d = 1$  m. Por los conductores circulan corrientes en el mismo sentido y la fuerza por unidad de longitud que ejerce un conductor sobre el otro es de  $10^{-6}$  N/m. Si por el conductor 1 pasa una corriente  $I_1 = 2$  A, a) Calcule la corriente que circula por el conductor 2. b) Calcule el campo magnético (módulo, dirección y sentido) en un punto P situado entre los cables, a distancia  $d/5$  del conductor 2. Dato:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  m.kg.C<sup>-2</sup>.

**Respuesta:**

- a) La fuerza por unidad de longitud que cada uno de los conductores ejerce sobre el otro es:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad 10^{-6} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot I_2}{2\pi \cdot 1} \quad I_2 = 2,5 \text{ A}$$

- b) La representación gráfica es la siguiente:



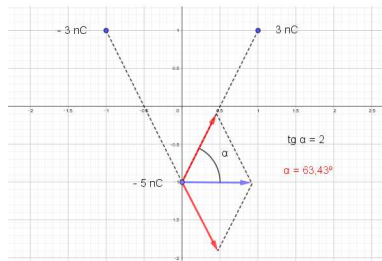
De dicha representación gráfica se deduce que los vectores campo magnético tienen la misma dirección y sentido contrario. Si consideramos los conductores situados en el plano XY, el vector campo resultante será:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0,8} \vec{k} - \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,5}{2\pi \cdot 0,2} \vec{k} = -2 \cdot 10^{-6} \vec{k} \text{ T}$$

7. Tres partículas cargadas  $q_1 = 3$  nC,  $q_2 = -3$  nC y  $q_3 = -5$  nC están situadas en los puntos de coordenadas  $q_1: (-1,1)$ ,  $q_2:(1,1)$  y  $q_3:(0,-1)$ , expresadas en metros. Determine la fuerza neta (módulo, dirección y sentido) que actúa sobre la carga  $q_3$ . Datos  $K=1/4\pi\epsilon_0=9 \cdot 10^9$  N.m<sup>2</sup>.C<sup>-2</sup>,  $1$  nC= $10^{-9}$  C.

**Respuesta:**

De la siguiente representación gráfica:



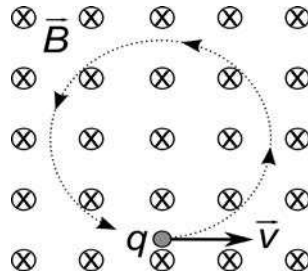
Podemos deducir que la fuerza resultante actúa en el sentido positivo del eje X. El módulo de cada una de las fuerzas que actúa sobre la de  $-5$  nC tiene el mismo valor:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{2^2 + 1^2} = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

La fuerza resultante será:

$$\vec{F} = 2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-8} \cos 63,43^\circ \vec{i} = 2,41 \cdot 10^{-8} \vec{i} \text{ N}$$

8. Una partícula de masa  $m$  con carga eléctrica  $q$  se mueve en el seno de un campo magnético  $B$ , en dirección perpendicular al campo, con una velocidad  $v$ , de forma que describe una trayectoria circular de radio  $R$ , tal como se muestra en la figura. a) Calcule el valor de la carga  $q$  y deduzca razonadamente su signo. b) Si la misma carga se moviese en dirección paralela al campo, ¿cuál sería el radio de la trayectoria? Datos:  $m = 3,82 \cdot 10^{-26}$  kg,  $B = 5 \cdot 10^{-6}$  T,  $v = 4$  m/s,  $R = 19,1$  cm.



**Respuesta:**

- a) El radio de la trayectoria es:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{3,82 \cdot 10^{-26} \cdot 4}{q \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 0,191 \quad q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

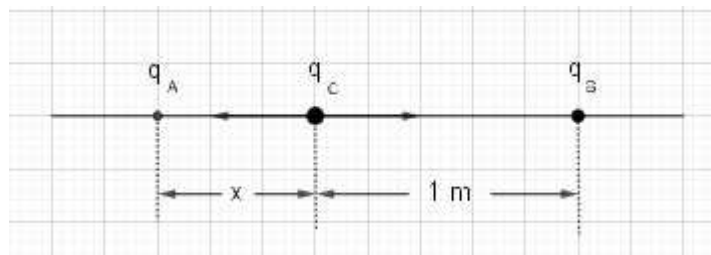
La carga debe tener **signo negativo**, pues la fuerza es perpendicular a la trayectoria y tiene el valor:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Si la carga fuera positiva, la fuerza tendría sentido contrario al señalado.

- b) Si la carga se desplazara paralelamente al campo, la fuerza sobre ella sería nula, pues  $\vec{v} \times \vec{B} = 0$ . La trayectoria de la partícula sería **rectilínea**.

9. Las cargas  $q_A = -2 \cdot 10^{-6}$  C,  $q_B = -4 \cdot 10^{-6}$  C y  $q_C = -8 \cdot 10^{-6}$  C están situadas sobre una recta. La carga  $q_A$  está situada a 1 m de la carga  $q_B$  y la carga  $q_C$  se encuentra entre las cargas  $q_A$  y  $q_B$ . a) Si la fuerza eléctrica total sobre la carga  $q_C$  debida a las otras dos cargas es 0, calcule la distancia entre  $q_C$  y  $q_A$ . b) Calcule el trabajo que se debe realizar para trasladar la carga  $q_C$  desde la posición en la que se encuentra hasta un punto equidistante de  $q_A$  y  $q_B$ . Interprete el signo del resultado. Dato:  $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9,0 \cdot 10^9$  N · m<sup>2</sup> · C<sup>-2</sup>

**Respuesta:**

- a) Un esquema de la distribución de cargas sería el siguiente:



Puesto que los módulos de las dos fuerzas deben ser iguales, tendremos:

$$\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{x^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{1^2} \quad x = 0,707 \text{ m}$$



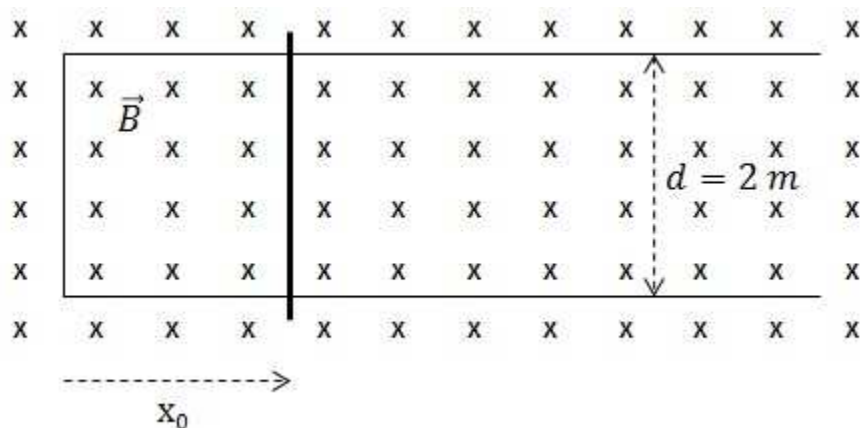
b) El trabajo sobre la carga  $q_C$  será:  $W = U_0 - U$ , siendo:

$$U_0 = \frac{9 \cdot 10^9 (-2 \cdot 10^{-6}) (-8 \cdot 10^{-6})}{0,71} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^{-6}) (-8 \cdot 10^{-6})}{1} = 0,491 \text{ J}$$

$$U = \frac{9 \cdot 10^9 (-2 \cdot 10^{-6}) (-8 \cdot 10^{-6})}{0,85} - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^{-6}) (-8 \cdot 10^{-6})}{0,85} = 0,508 \text{ J}$$

El trabajo será, entonces  $W = 0,491 - 0,508 = -0,017 \text{ J}$ . El signo negativo indica que el trabajo es realizado en contra del campo eléctrico.

10. Considere una varilla conductora que desliza en contacto eléctrico con un marco, de material conductor, en forma de U. Los lados paralelos del marco conductor están separados una distancia  $d = 2 \text{ m}$ . La varilla describe un movimiento vibratorio armónico simple alrededor de la posición de equilibrio  $x_0 = 1 \text{ m}$ , según la ecuación del movimiento siguiente (todas las magnitudes están expresadas en el sistema internacional:  $x(t) = x_0 - 0,3 \text{ sen}(32t)$ ). Todo el conjunto se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme, perpendicular al plano del marco y en el sentido de entrada al plano del papel, de módulo  $B = 0,5 \text{ T}$ . a) ¿Cuál es el flujo del campo magnético a través de la superficie comprendida entre la varilla y la parte cerrada del marco en el instante  $t = 0$ ? b) Escriba una ecuación que exprese la variación del flujo en función del tiempo. c) Determine el valor máximo que alcanza la fuerza electromotriz inducida.



**Respuesta:**

a) El área de la superficie cerrada atravesada por el campo magnético sería:

$$S = 2(1 - 0,3 \text{ sen } 32t)$$

El flujo del campo magnético para  $t = 0$  es:

$$\varphi = BS \cos 0^\circ = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ wb}$$

b) La variación del flujo con el tiempo vendrá dada por:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d 0,5 [2(1 - 0,3 \text{ sen } 32t)]}{dt} = -0,3 \cdot 32 \cos 32t$$

c) El valor máximo de la f.e.m. inducida es:

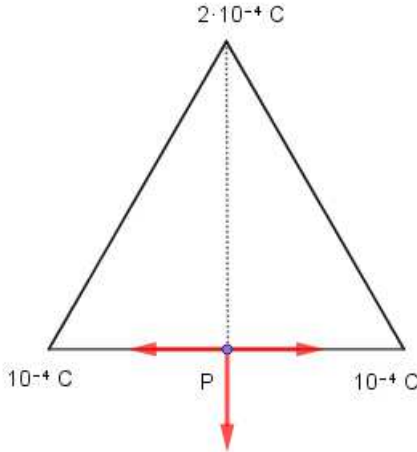
$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt}$$

Con lo que la f.e.m. inducida máxima será:  $\varepsilon = 0,3 \cdot 32 = 9,6 \text{ V}$

11. Tres cargas eléctricas puntuales y positivas se encuentran situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado  $\sqrt{3}$  m. Dos de ellas tienen carga  $q$  y la tercera tiene carga  $2q$ , siendo  $q = 10^{-4}$  C. calcule: a) El campo eléctrico y el potencial eléctrico en el punto medio del lado en el que se encuentran las cargas más pequeñas (punto P). b) El trabajo que debe realizarse para trasladar la carga  $2q$  desde el vértice donde se encuentra hasta el punto P. Dato:  $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$

**Respuesta:**

a) La representación gráfica del campo eléctrico en el punto P puede verse en la siguiente imagen:



Como puede verse, la resultante del campo debido a las dos cargas de  $10^{-4}$  C es nula, por lo que el campo resultante será:

$$\vec{E} = -\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{\left(\sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^2} \vec{j} = -3,56 \cdot 10^5 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El potencial eléctrico en P será:

$$V_P = 2 \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = 1,43 \cdot 10^6 \text{ V}$$

b) El trabajo realizado para desplazar la carga de  $2 \cdot 10^{-4}$  C desde su posición inicial hasta P será:

$$W = 2 \cdot 10^{-4} (U_0 - U_P)$$

Siendo:

$$U_0 = 2 \frac{9 \cdot 10^9 10^{-4}}{\sqrt{3}} = 1,04 \cdot 10^6 \text{ J} \quad U_P = 2 \frac{9 \cdot 10^9 10^{-4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,08 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$W = 2 \cdot 10^{-4} (1,04 \cdot 10^6 - 2,08 \cdot 10^6) = -208 \text{ J}$$

12. a) Un protón que lleva una velocidad de  $1,00 \cdot 10^5$  m/s según el sentido positivo del eje x entra en un espectrómetro de masas en el que hay un campo magnético  $\vec{B} = 1,00 \cdot 10^{-2} \vec{k}$  T. Calcule la fuerza

(módulo, dirección y sentido) que actúa sobre el protón. Determine el radio de su trayectoria. b) Calcule el campo magnético (módulo, dirección y sentido) necesario para que, si entra un electrón con la misma velocidad que el protón en el espectrómetro, describa la misma trayectoria. Datos:  $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ ; carga del protón  $q_p = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ; carga del electrón  $q_e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ; masa del electrón  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ; masa del protón  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

**Respuesta:**

a) La fuerza sobre el protón es:

$$\vec{F} = 1,60 \cdot 10^{-19} (1,00 \cdot 10^5 \vec{i} \times 1,00 \cdot 10^{-2} \vec{k}) = -1,6 \cdot 10^{-16} \vec{j} \text{ N}$$

El radio de la trayectoria será:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,00 \cdot 10^5}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}} = 0,104 \text{ m}$$

Para que la trayectoria del electrón sea la misma que la del protón, tendremos:

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,00 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,104} = 5,47 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

El sentido debe ser el opuesto al del campo que actuaba sobre el protón, es decir:

$$\vec{B} = -5,47 \cdot 10^{-6} \vec{k} \text{ T}$$

## 5. Física moderna

1. La energía de extracción de electrones (función de trabajo) del oro es 5,1 eV. Calcule la frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico de este metal. Calcule el potencial de frenado de los electrones arrancados cuando se ilumina una muestra de oro con luz de 230 nm de longitud de onda. Datos: Constante de Planck,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J.s; velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>; carga del electrón  $q_e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C ; 1 eV = 1,60 · 10<sup>-19</sup> J; 1 nm = 10<sup>-9</sup> m.

**Respuesta:**

a) El trabajo de extracción, expresado en J será:  $W_{ext} = 5,1 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} = 8,16 \cdot 10^{-19}$  J. La frecuencia umbral será, por tanto:

$$\nu_0 = \frac{W_{ext}}{h} = \frac{8,16 \cdot 10^{-19}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 1,23 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

La longitud de onda de 230 nm corresponde a una frecuencia:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,3 \cdot 10^{-7}} = 1,30 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Aplicando la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$h\nu = h\nu_0 + qV_f \longrightarrow V_f = \frac{h\nu - h\nu_0}{q} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1,30 \cdot 10^{15} - 8,16 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,29 \text{ V}$$

2. El <sup>99</sup>Tc es un isótopo radiactivo, emisor de rayos  $\gamma$ , que, cuando se inyecta en el cuerpo humano, se concentra en los huesos, por lo que se emplea en técnicas de radiodiagnóstico. Tiene un periodo de semidesintegración de seis horas. Si se inyecta a un paciente una dosis de <sup>99</sup>Tc, ¿al cabo de cuánto tiempo quedará en el organismo sólo el 10 % de la cantidad inicial?

**Respuesta:**

La constante de desintegración radiactiva es:

$$\lambda = \frac{0,693}{6} = 0,116 \text{ h}^{-1}$$

El número de núcleos restantes al cabo de un tiempo t, en el ejemplo, el 10 %, podrá expresarse de la siguiente forma:

$$0,1 N_0 = N_0 e^{-0,116 t}$$

De donde, al despejar, se obtiene:  $t = 19,85$  h.

3. Analizando una muestra de material radiactivo se comprueba que al cabo de un año su actividad es una décima parte de la inicial. Determine la constante de desintegración del material. b) Calcule el periodo de semidesintegración.

**Respuesta:**

La actividad es igual al producto de la constante de desintegración por el número de núcleos en un momento dado, por lo que el número de núcleos restantes al cabo de un año será también la décima parte del número inicial Por tanto:

$$N_0/10 = N_0 e^{-\lambda \cdot 1} \quad \lambda = 2,3 \text{ años}^{-1}$$

b) El periodo de semidesintegración será:

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{2,3} = 0,30 \text{ años}$$

4. Se observa que se produce efecto fotoeléctrico cuando la luz que incide sobre una muestra de platino tiene una longitud de onda inferior a 209 nm. ¿Qué energía cinética máxima, expresada en eV, tendrán los electrones emitidos cuando iluminamos la muestra de platino con luz de 145 nm? Datos: Constante de Planck,  $h=6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s; velocidad de la luz en el vacío,  $c=3 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>; 1 nm=10<sup>-9</sup> m; 1 eV=1,6·10<sup>-19</sup> J.

**Respuesta:**

El trabajo de extracción tendrá el valor:

$$W_{\text{ext}} = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,09 \cdot 10^{-7}} = 9,52 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La energía incidente será:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,45 \cdot 10^{-7}} = 1,37 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

La energía cinética será, pues:

$$E_c = E - W_{\text{ext}} = 1,37 \cdot 10^{-18} - 9,52 \cdot 10^{-19} = 4,18 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

5. Iluminamos una muestra con radiación de longitud de onda  $\lambda=23,7 \times 10^{-9}$  m. Los fotoelectrones analizados tienen una energía cinética máxima de 47,7 eV. a) Calcule la función de trabajo (o trabajo de extracción) del material analizado en J y en eV. b) Determine la frecuencia umbral para este material. ¿Cómo cambiaría esta frecuencia umbral si se duplicase la intensidad del haz de radiación UV? Datos:  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J · s; 1 eV= 1,602·10<sup>-19</sup> J

**Respuesta:**

a) Según la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$\frac{hc}{\lambda} = W_{\text{ext}} + E_c \quad \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,37 \cdot 10^{-8}} = W_{\text{ext}} + 47,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$$

El trabajo de extracción será, pues:

$$W_{\text{ext}} = 7,60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad W_{\text{ext}} = \frac{7,60 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,75 \text{ eV}$$

b) La frecuencia umbral sería:

$$\nu_0 = \frac{W_{\text{ext}}}{h} = 1,14 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

La variación de la intensidad de la radiación UV no afecta a la frecuencia umbral, pues esta es característica del material.

6. Un gramo de unos restos óseos contiene  $9,5 \cdot 10^8$  átomos de carbono 14 (<sup>14</sup>C). El análisis de una muestra actual de características similares revela que en el momento de la muerte de los animales los huesos tenían  $6,9 \cdot 10^9$  átomos de <sup>14</sup>C por cada gramo. Calcule la constante de desintegración y determine la antigüedad de los restos si sabemos que el período de semidesintegración del <sup>14</sup>C es de 5730 años.

**Respuesta:**

a) La constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{0,693}{T} = \frac{0,693}{5730} = 1,209 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Para determinar la antigüedad de los restos:

$$9,5 \cdot 10^8 = 6,9 \cdot 10^9 e^{-1,209 \cdot 10^{-4} t} \quad t = 16400 \text{ años}$$