

PRUEBAS EBAU FÍSICA

Juan P. Campillo Nicolás

21 de julio de 2019

Nota: Se proporcionan los valores de las siguientes constantes físicas:

Velocidad de la luz en el vacío $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$; Masa del protón $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; Constante de gravitación universal $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; Masa del electrón $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; Constante de Coulomb $k = 9.0 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; Carga del protón $q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; Constante de Planck $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; Carga del electrón $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; Radio de la Tierra $R_T = 6370 \text{ km}$; Masa de la Tierra $M_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

1. Gravitación.

1. Un satélite de 500 kg realiza una órbita circular alrededor de la tierra a una altura de 230 km sobre la superficie terrestre. Determina: a) El periodo del satélite y su velocidad orbital. b) La energía potencial y mecánica del satélite en la órbita.

Respuesta:

- a) El periodo se puede deducir de la Tercera Ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 [(6,37 + 0,23)10^6]^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 5326,8 \text{ s}$$

La velocidad orbital será:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 + 0,23)10^6}} = 7784,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) La energía potencial es:

$$U = -\frac{GHm}{r} = -\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{(6,37 + 0,23)10^6} = -3,03 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

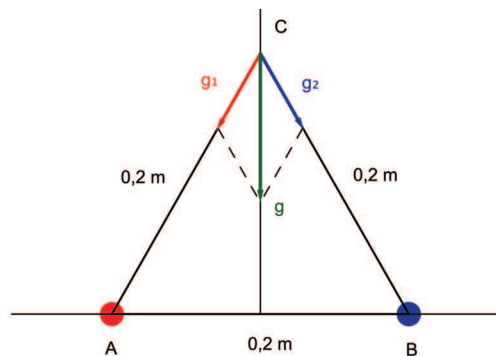
La energía total tiene el valor:

$$E = -\frac{GHm}{2r} = -\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2(6,37 + 0,23)10^6} = -1,51 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

2. En dos de los vértices, A y B, de un triángulo equilátero de lado 20 m se sitúan dos masas puntuales de 30 kg cada una. a) Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el vértice libre C del triángulo. b) Calcular la fuerza sobre una masa puntual de 10 kg, situada en ese vértice libre. c) Hallar el potencial gravitatorio en dicho vértice libre C.

Respuesta:

- a) La representación gráfica es la siguiente: dado que las masas son iguales, así como sus respectivas



distancias al vértice C, podremos poner:

$$|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2| = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 30}{0,2^2} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ N/kg}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = |\vec{g}_1| \vec{u}_1 + |\vec{g}_2| \vec{u}_2$$

Por razones de simetría, veremos que las componentes horizontales de g se anulan entre sí. La componente vertical de cada uno de los vectores campo será:

$$\vec{g}_{1y} = \vec{g}_{2y} = -5 \cdot 10^{-8} \cdot \cos 30^\circ \vec{j}$$

(30° es el ángulo que forma cada uno de los vectores g con el eje Y). Así pues: $\vec{g} = \vec{g}_{1y} + \vec{g}_{2y} = 2(-5 \cdot 10^{-8} \cdot \cos 30^\circ) \vec{j} = -8,66 \cdot 10^{-7} \vec{j} \text{ N/kg}$

b) La fuerza sobre una masa de 10 kg, situada en el vértice C será:

$$\vec{F} = m \vec{g} = 10(-8,66 \cdot 10^{-7} \vec{j}) = -8,66 \cdot 10^{-6} \vec{j} \text{ N}$$

c) El potencial gravitatorio en C será:

$$V_C = V_1 + V_2 = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 30}{0,2} + \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 30}{0,2} = -2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

3. Se desea poner un satélite de comunicaciones de 1000 kg de masa en una órbita circular a 300 km sobre la superficie de la Tierra. a) ¿Qué velocidad, periodo y aceleración debe tener en esa órbita? b) ¿Cuánto trabajo se requiere para poner el satélite en órbita? c) ¿Cuánto trabajo adicional se necesitaría para que el satélite escape de la influencia de la tierra?

Respuesta:

a) El radio de la órbita será: $r = r_T + h = 6,37 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 = 6,67 \cdot 10^6 \text{ m}$. La velocidad de la órbita será:

$$\sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,67 \cdot 10^6}} = 7726,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El periodo valdrá:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6,67 \cdot 10^6}{7726,6} = 5424 \text{ s}$$

La aceleración es:

$$a = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,67 \cdot 10^6)^2} = 8,95 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$\frac{-GMm}{r_t} + E = -\frac{GMm}{2r} \quad \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{6,37 \cdot 10^6} + E = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^6}$$

$$E = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^6} = 3,27 \cdot 10^7 \text{ J}$$

c) Para que el satélite abandone la influencia de la Tierra, tendremos que realizar un trabajo W , tal que:

$$\frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^6} + W = 0 \quad W = 2,99 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Puesto que en el infinito, la energía total del satélite valdrá cero.

4. Marte tiene una masa de $6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ es decir unas 0.107 veces la masa de la Tierra y un radio de 3400 km, es decir, unas 0.533 veces el radio terrestre. a) Determina el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte. b) Halla la velocidad de escape desde la superficie del planeta.

Respuesta:

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte será:

$$g_M = \frac{G \cdot 0,107 m_T}{(0,533 r_T)^2} = 9,8 \frac{0,107}{0,533^2} = 3,69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La velocidad de escape tendrá el valor:

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm_M}{r_m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{3,4 \cdot 10^6}} = 5018,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. Un satélite de 500 kg se sitúa a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Determinar: a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite desde la superficie de la tierra ¿Cuál sería la energía mecánica en esa órbita? b) Una vez en órbita ¿cuál es la energía mínima que hay que suministrar al satélite para que escape de la acción del campo?

Respuesta:

a) Las energías potenciales en la superficie de la Tierra y en la órbita son, respectivamente:

$$U_0 = -\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{6,37 \cdot 10^6} = -3,14 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$U_1 = -\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{6,37 \cdot 10^6 + 1,2 \cdot 10^6} = -2,64 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

El aumento en la energía potencial será, pues:

$$\Delta U = U_1 - U_0 = -2,64 \cdot 10^{10} - (-3,14 \cdot 10^{10}) = 5 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) La energía en la órbita será:

$$E_1 = -\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2(6,37 \cdot 10^6 + 1,2 \cdot 10^6)} = -1,32 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

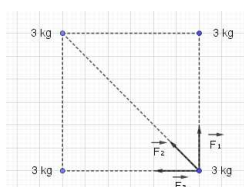
Para que el satélite escape a la acción del campo, su energía final debe ser cero, por lo cual:

$$-1,32 \cdot 10^{10} + E = 0 \quad E = 1,32 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

6. Cuatro masas idénticas de 3 kg cada una están situadas sobre los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. a) Calcula la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre la que se halla en el vértice inferior derecho y represéntalo. b) El potencial gravitatorio que hay en ese vértice debido a las otras tres masas.

Respuesta:

a) La representación gráfica sería la siguiente:



De esta representación gráfica puede deducirse lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_1| &= |\vec{F}_3| = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 3^2}{1^2} = 6,03 \cdot 10^{-10} \text{ N} \\ |\vec{F}_2| &= \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 3^2}{1^2 + 1^2} = 3,01 \cdot 10^{-10} \text{ N} \\ \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 \\ \vec{F} &= 6,03 \cdot 10^{-10} \vec{j} - 6,03 \cdot 10^{-10} \vec{i} + 3,01 \cdot 10^{-10} (-\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}) \\ \vec{F} &= -8,16 \cdot 10^{-10} \vec{i} + 8,16 \cdot 10^{-10} \vec{j} \text{ N} \end{aligned}$$

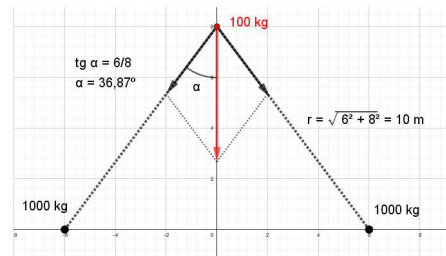
b) El potencial gravitatorio será:

$$U_g = 2 \left(-\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{1} \right) - \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{\sqrt{2}} = 3,43 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

7. Dos masas iguales y de valor 1000 kg se hallan sobre el eje X situadas en los puntos (-6, 0) y (6, 0) respectivamente. a) Expresa correctamente la fuerza que experimenta una masa $m = 100$ kg, situada en el punto (0, 8), así como el potencial en ese punto debido a las otras dos masas. b) Calcula el trabajo realizado por la gravedad para llevar la masa m desde el punto (0, 0) al punto p (0, 8).

Respuesta:

a) La fuerza experimentada por la masa de 100 kg puede ser representada gráficamente de la forma:



Como puede verse, la fuerza resultante está dirigida en el sentido negativo del eje Y, siendo su valor:

$$\vec{F} = -2 \frac{GMm}{r^2} \cos 36,87^\circ \vec{j} = -2 \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000 \cdot 100}{100} 0,8 \vec{j} = -1,067 \cdot 10^{-7} \vec{j} \text{ N}$$

b) En los puntos (0,0) y (0,8), los potenciales gravitatorios respectivos son:

$$V_{(0,0)} = 2 \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000}{4} = -3,335 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$V_{(0,8)} = 2 \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000}{10} = -1,334 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

El trabajo necesario será:

$$W = m(V_{(0,0)} - V_{(0,8)}) = 100 (-3,335 \cdot 10^{-8} - (-1,334 \cdot 10^{-8})) \simeq -2 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

8. El planeta Mercurio tiene una gravedad en su superficie de 0,376 veces la terrestre y su radio es 0,38 veces el radio terrestre. a) Obtén la masa de Mercurio. b) Determina la velocidad de escape desde la superficie de Mercurio.

Respuesta:

a) La gravedad en la superficie de mercurio es:

$$g_M = 0,376 \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{GM_M}{(0,38 R_T)^2}$$

De donde podemos despejar la masa de Mercurio:

$$M_M = 0,38^2 \cdot 0,376 \cdot M_T = 0,38^2 \cdot 0,376 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} = 3,24 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

b) la velocidad de escape será:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,24 \cdot 10^{23}}{0,38 \cdot 6,37 \cdot 10^6}} = 4225,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

9. Determinar para un satélite artificial de masa 750 kg que rodea la Tierra en una órbita circular de 8000 km de radio: a) Deduce la expresión de la velocidad y obtén su valor, así como el periodo. b) La energía potencial gravitatoria que tendría dicho satélite. c) El trabajo que se requiere para poner el satélite en esa órbita.

Respuesta:

a) para obtener la velocidad orbital, igualamos las fuerza de atracción gravitatoria al producto de masa por aceleración centrípeta:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Sustituyendo valores:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{8 \cdot 10^6}} = 7061 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La energía potencial gravitatoria del satélite es:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 750}{8 \cdot 10^6} = -3,74 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

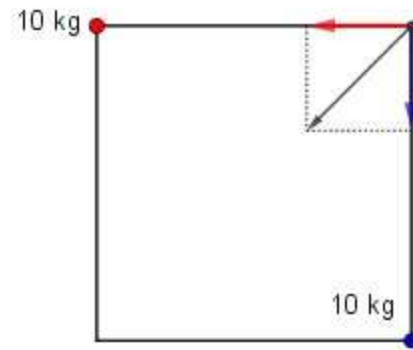
c) Para calcular el trabajo necesario para poner el satélite en órbita, aplicamos el Principio de Conservación de la Energía:

$$-\frac{GMm}{r_T} + W = -\frac{GMm}{2r} \quad -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 750}{6,47 \cdot 10^6} + W = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 750}{2 \cdot 8 \cdot 10^6}$$

$$W = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 750}{10^6} \left(\frac{1}{6,47} - \frac{1}{16} \right) = 2,75 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

10. En dos puntos, A y B, de coordenadas (20, 0) y (0, 20) expresadas en metros, se sitúan dos masas puntuales de 10 kg cada una. a) Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el punto C (20, 20). b) Hallar el potencial gravitatorio en el punto C. c) Hallar la fuerza sobre una masa puntual de 5 kg, situada en ese punto C.

Respuesta:



a) El módulo del campo gravitatorio creado por cada una de las cargas en el punto (20,20) tiene el mismo valor:

$$|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{20^2} = 1,67 \cdot 10^{-12} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

A partir de la siguiente representación gráfica:

Expresamos la intensidad de campo gravitatorio como:

$$\vec{g} = -1,67 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1,67 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

b) El potencial gravitatorio en C (20,20) será:

$$V_g = V_{1g} + V_{2g} = -2 \frac{GM}{r} = -2 \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{20} = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

c) La fuerza sobre una masa situada en ese punto será:

$$\vec{F} = m\vec{g} = 5(-1,67 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1,67 \cdot 10^{-12} \vec{j}) = -8,35 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 8,35 \cdot 10^{-12} \vec{j}$$

11. Un satélite de 700 kg realiza una órbita circular alrededor de la Tierra de 7500 km de radio. Obtener:
a) El periodo del satélite. b) La energía potencial y mecánica.

Respuesta:

a) El periodo es:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (7,5 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 6462 \text{ s}$$

b) Las energía potencial y mecánica son, respectivamente:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 700}{7,5 \cdot 10^6} = -3,72 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 700}{2 \cdot 7,5 \cdot 10^6} = -1,86 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

12. ¿Cuál es la velocidad mínima que es preciso comunicar a un objeto situado a 1000 Km de altura sobre la superficie terrestre para que escape del campo gravitatorio? ¿En qué sentido? b) Obtén la energía total del cuerpo, cuando se encuentra en esa órbita y las diferentes contribuciones a esta.

Respuesta:

a) Habrá que comunicarle una velocidad cuya expresión se deduce de:

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 10^6}} = 10404 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El sentido del movimiento es **indiferente**, siempre y cuando el objeto no se dirija directamente hacia la Tierra. b) La energía potencial, cinética y total en la órbita son, respectivamente:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot \text{m}}{7,37 \cdot 10^6} = -5,41 \cdot 10^7 \text{ m J}$$

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot \text{m}}{2 \cdot 7,37 \cdot 10^6} = 2,71 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot \text{m}}{2 \cdot 7,37 \cdot 10^6} = -2,71 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

2. Vibraciones y ondas.

1. En una cuerda se genera una onda transversal que se traslada a 12 m/s en el sentido negativo del eje x. El foco que origina la onda está situado en $x = 0$, y vibra con una frecuencia de 12 Hz y una amplitud de 4 cm. El foco se encuentra en la posición de amplitud nula en el instante inicial. a) Determinar la ecuación de la onda en unidades SI. b) Calcular la diferencia de fase de oscilación entre dos puntos de la cuerda separados 80 cm.

Respuesta:

a) La expresión general de la ecuación de la onda tendrá la forma: $y = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$. Con los datos del enunciado, podremos poner que:

$$A = 0,04 \text{ m} \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 12 = 24\pi \text{ s}^{-1} \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{24\pi}{12} = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

Teniendo en cuenta, además, que para $t = 0$, y $x = 0, y = 0$, veremos que: $0 = 0,04 \sin \varphi_0$, por lo que $\varphi_0 = 0$. La ecuación de la onda será, pues:

$$y = 0,04 \sin(24\pi t + 2\pi x)$$

El signo + delante del término kx se debe a que la onda se propaga en sentido negativo del eje X.

b) La longitud de onda es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{12}{12} = 1 \text{ m}$. Teniendo en cuenta que a una longitud de onda le corresponde una diferencia de fase de 2π radianes, podremos poner:

$$\frac{1 \text{ m}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{0,8 \text{ m}}{\varphi \text{ rad}} \rightarrow \varphi = 1,6\pi \text{ rad}$$

2. En una cuerda se propaga una onda armónica transversal cuya ecuación (en unidades del SI) viene dada por la siguiente función: $y(x, t) = 20 \sin(-\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}x)$. a) Determinar la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación. b) Razonar el sentido de propagación de la onda y hallar la distancia a la que se encuentran, en un instante dado, dos puntos de esa cuerda que tienen una diferencia de fase entre ellos de $\pi/2$ rad.

Respuesta:

a) De los datos del enunciado se deduce:

$$\omega = \frac{\pi}{2} = 2\pi\nu \rightarrow \nu = 0,25 \text{ s}^{-1} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \lambda = 8 \text{ m} \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{\pi/2}{\pi/4} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) teniendo en cuenta que a una longitud de onda (8 m) corresponde una diferencia de fase de 2π radianes, podremos poner:

$$\frac{8 \text{ m}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x \text{ m}}{\pi/2 \text{ rad}} \quad x = 2 \text{ m}$$

3. Un alumno estudia la propagación de ondas transversales en una cuerda y determina que se propaga hacia su derecha con una frecuencia de 2 Hz. La amplitud que observa es de 15 cm y la distancia que mide entre dos máximos idénticos consecutivos es de 80 cm. Suponer la elongación en la posición inicial en $t = 0$ nula. Se pide: a) La ecuación de la onda en unidades SI. b) Distancia entre dos puntos con una diferencia de fase de $\pi/2$ radianes.

Respuesta:

a) De los datos del enunciado, se deduce lo siguiente:

$$\nu = 2 \text{ Hz} \quad A = 0,15 \text{ m} \quad \lambda = 0,8 \text{ m}$$

La ecuación de la onda será:

$$y = 0,15 \text{ sen} \left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0 \right) = 0,15 \text{ sen} (4\pi t - 2,6\pi x + \varphi_0)$$

Puesto que, para $t = 0$ y $x = 0$, $y = 0$, tendremos que: $0 = 0,15 \text{ sen } \varphi_0$, con lo que $\varphi_0 = 0$. La ecuación de la onda quedará, finalmente, así:

$$0,15 \text{ sen} (4\pi t - 2,6\pi x)$$

b) Puesto que, a una longitud de onda le corresponde una diferencia de fase de 2π radianes, podremos escribir:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{0,8 \text{ m}} = \frac{\pi/2 \text{ rad}}{x \text{ m}} \quad x = 0,2 \text{ m}$$

4. La función de una onda armónica transversal que se mueve sobre una cuerda viene dada por la expresión: $y(x, t) = 0,3 \text{ sen} (2,2 x - 3,5 t)$. Las longitudes se expresan en metros y los tiempos en segundos a) ¿En qué dirección se propaga esta onda y cuál es su velocidad? b) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda. c) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de cuerda?

Respuesta:

a) La onda se propaga de izquierda a derecha a lo largo del eje X. Su velocidad se obtiene de:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{3,5}{2,2} = 1,59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Sabiendo el valor de k , que es 2,2, tendremos: $2,2 = \frac{2\pi}{\lambda}$, de donde obtenemos: $\lambda = \frac{2\pi}{2,2} = 2,86 \text{ m}$.
Conocido el valor de ω , que es 3,5, tendremos: $3,5 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, con lo que podremos escribir:

$$\nu = \frac{3,5}{2\pi} = 0,56 \text{ s}^{-1} \quad T = \frac{1}{0,56} = 1,79 \text{ s}$$

c) La velocidad de vibración de cualquier punto de la cuerda es:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,3(-3,5) \cos(2,2 x - 3,5 t)$$

La velocidad máxima para cualquier punto de la cuerda será, pues: $v = 0,3 \cdot 3,5 = 1,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

5. La ecuación de una onda transversal es, en unidades del S.I. $y(x,t) = 8 \cdot \cos \left(2\pi \left(\frac{t}{0,02} - \frac{x}{50} \right) \right)$ a) Amplitud, frecuencia, período y longitud de onda. b) Diferencia de fase entre dos puntos separados 25 m. c) Escribir la ecuación de onda de la misma amplitud y frecuencia pero que se propague en sentido contrario y con la mitad de velocidad.

Respuesta:

a) Los valores pedidos son los siguientes: $A = 8 \text{ m}$; $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi$, con lo que $\nu = 50 \text{ Hz}$.

Puesto que $T = 1/\nu$, tendremos que $T = 0,02$ s. Sabemos también que $k = 2\pi/\lambda = \frac{2\pi}{50}$, con lo que $\lambda = 50$ m.

b) Teniendo en cuenta que a una longitud de onda (50 m) le corresponde una diferencia de fase de 2π radianes, podremos escribir:

$$\frac{50 \text{ m}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{25 \text{ m}}{\Delta\varphi \text{ rad}} \quad \Delta\varphi = \pi \text{ rad}$$

c) Si tenemos en cuenta que $k = \omega/v$, al disminuir la velocidad a la mitad, el valor de k se hará doble, es decir, $k' = \frac{2\pi}{25} \text{ m}^{-1}$. La ecuación de la onda quedará entonces en la forma:

$$y(x, t) = 8 \cos \left(100\pi t + \frac{2\pi}{25} x \right)$$

6. Una onda transversal de amplitud 0,8 m, frecuencia de 250 Hz y velocidad de propagación de 150 m/s, se propaga hacia valores positivos de x . Determina: a) Escribe la ecuación de la onda, si en el instante inicial $y(0,0) = 0,2$ m, determina la fase inicial. b) ¿A qué distancia se encuentran dos puntos consecutivos que vibran con una diferencia de fase de 60° ?

Respuesta:

a) la ecuación de la onda tendrá la forma:

$$y(x, t) = 0,8 \text{ sen} \left(500\pi t - \frac{500\pi}{150} x + \varphi_0 \right)$$

Puesto que $y(0,0) = 0,2$ m, podremos escribir lo siguiente:

$$0,2 = 0,8 \text{ sen } \varphi_0 \quad \varphi_0 = 0,253 \text{ rad}$$

b) La longitud de onda, correspondiente a una diferencia de fase de 2π radianes será:

$$\lambda = \frac{\omega}{v} = \frac{150}{250} = 0,6 \text{ m}$$

La diferencia de fase de 60° corresponderá a un ángulo de $\pi/3$ radianes, por lo que podremos establecer la siguiente relación:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{0,6 \text{ m}} = \frac{\pi/3 \text{ rad}}{x \text{ m}} \quad x = 0,10 \text{ m}$$

7. Una onda se propaga transversalmente por una cuerda en sentido positivo del eje x . El período de dicho movimiento es de 4 s y la distancia que recorre un punto de la cuerda entre posiciones extremas es de 30 cm. a) Si la distancia mínima que separa dos puntos de la cuerda que oscilan en fase es de 80 cm, ¿cuál es la velocidad de propagación de la onda?; ¿cuál es el número de onda? b) Escribe la ecuación de la onda suponiendo que su elongación inicial en el punto $x = 0$ es nula ($y(0, 0) = 0$).

Respuesta:

a) Del enunciado se deduce que la longitud de onda es de 80 cm. teniendo en cuenta la relación entre la longitud de onda y el período:

$$\lambda = v \cdot T \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,8}{4} = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El número de onda será:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ m}^{-1}$$

b) La ecuación de la onda tendrá la expresión:

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Siendo $A = 0,30/2 = 0,15$ m; $\omega = 2\pi/T = \pi/2 \text{ s}^{-1}$ y $k = 2\pi/\lambda = 2,5\pi \text{ m}^{-1}$. Si tenemos en cuenta que $y(0,0) = 0$, podremos escribir: $0 = 0,15 \operatorname{sen} \varphi_0$, con lo que $\varphi_0 = 0$. la ecuación de la onda quedará de la forma:

$$y = 0,15 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} t - 2,5\pi x \right)$$

8. La expresión matemática de una onda transversal en una cuerda es $y = 0,3 \operatorname{sen}(3\pi t - \pi x)$ donde x e y están expresados en metros y t en segundos. a) ¿Cuál es la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda? b) En un instante determinado, ¿cuál es la diferencia de fase entre dos puntos separados 1 metro?

Respuesta:

a) Comparando la expresión $y = 0,3 \operatorname{sen}(3\pi t - \pi x)$ con la expresión general de la ecuación de la onda, $y = A \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$, veremos que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi$, con lo que $\lambda = 2$ m. Sabiendo, por otra parte, que $\omega = 3\pi$ y que $k = \omega/v$, tendremos que:

$$\pi = \frac{3\pi}{v} \quad v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) A una diferencia de fase de 2π radianes le corresponde una distancia $= \lambda$, por lo que podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{2 \text{ m}} = \frac{\varphi \text{ rad}}{1 \text{ m}} \quad \varphi = \pi \text{ rad}$$

9. Sea una onda armónica transversal de 5 cm de amplitud, con una velocidad de propagación de 5 m/s y periodo 0.1 s. En el instante inicial, el punto situado en $x = 0$ tiene una elongación de 2.5 cm. a) Obtener la frecuencia y la longitud de onda. b) Escribir la ecuación de onda si se propaga hacia la derecha.

Respuesta:

a) La velocidad de propagación está relacionada con el periodo en la forma:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \lambda = v \cdot T = 5 \cdot 0,1 = 0,5 \text{ m}$$

La frecuencia es la inversa del periodo, es decir:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ s}^{-1}$$

b) La ecuación de la onda es del tipo:

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Para $x = 0$ y $t = 0$: $0,025 = 0,05 \operatorname{sen} \varphi_0$, con lo que $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$. Los valores de ω y k serán, respectivamente:

$$\omega = 2\pi\nu = 20\pi \text{ s}^{-1} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \text{ m}^{-1}$$

Con todo esto, la ecuación de la onda quedará así:

$$y = 0,05 \operatorname{sen} \left(20\pi t - 4\pi x + \frac{\pi}{6} \right)$$

10. Sabiendo que la intensidad umbral es 10^{-12} W / m^2 , si la sonoridad de un espectador de un partido de fútbol es 40 dB. a) ¿Cuál sería la sonoridad si gritaran con la misma intensidad sonora 1000 espectadores a la vez? b) ¿Cuál es la intensidad de una onda sonora de 85 dB?

Respuesta:

a) La intensidad emitida por un espectador se deduce de:

$$40 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \quad I = 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Para un total de 1000 espectadores, la intensidad será: $I_{1000} = 1000 \cdot 10^{-8} = 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. La sonoridad sería:

$$\beta = 10 \log \frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 70 \text{ dB}$$

b) Aplicando la ecuación que nos da el nivel de intensidad:

$$85 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \quad I = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

11. Dada la ecuación de onda armónica transversal, en unidades S.I. $y = 0,04 \text{ sen}(2x - \pi t + 2,0)$ a) la longitud, la frecuencia de la onda y la velocidad de propagación. b) El módulo de la velocidad máxima de oscilación de las partículas del medio por el cuál se propaga la onda. c) Distancia entre dos puntos con una diferencia de fase de $\pi/2$ radianes.

Respuesta:

a) Comparando con la ecuación general de la onda: $y = A \text{ sen}(kx - \omega t + \varphi_0)$, tendremos:

$$\omega = 2\pi\nu = \pi \quad \nu = 0,5 \text{ s}^{-1} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2 \quad \lambda = \pi \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad v = \lambda \cdot \nu = \frac{\pi}{2} \text{ m}$$

b) La velocidad de oscilación es:

$$v = \frac{dy}{dt} = -0,04\pi \cos(2x - \pi t + 2,0) \quad v_{\text{máx}} = 0,126 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) A partir de la relación:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{\pi \text{ m}} = \frac{\pi/2 \text{ rad}}{x \text{ m}} \quad x = \frac{\pi}{4} \text{ m}$$

12. Una fuente sonora isótropa produce un nivel de intensidad sonora de 60 dB a 1 m de distancia. Si el umbral de percepción de intensidad $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Calcular: a) La intensidad del sonido de la fuente en ese punto. b) La potencia emitida por la fuente.

Respuesta:

a) la intensidad del sonido se deduce de:

$$60 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \quad I = 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) La potencia es:

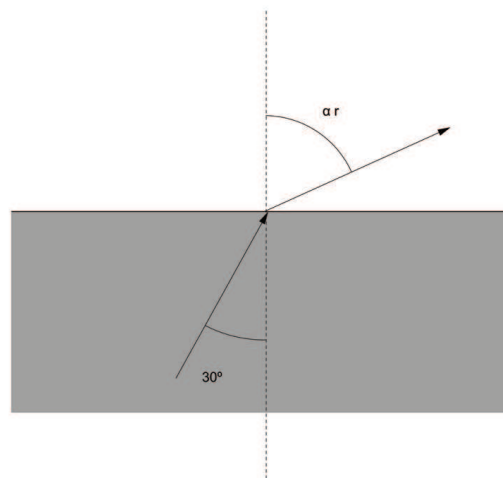
$$I = \frac{P}{S} \quad P = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 1^2 = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

3. Óptica.

1. Un rayo de luz monocromática de longitud de onda 200 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) en un medio de índice $2,5$ alcanza una superficie de separación (plana) con agua (índice $1,33$) incidiendo con un ángulo de 30° respecto a la normal a dicha superficie. a) Dibujar un esquema, cualitativamente correcto del proceso descrito y calcular el ángulo de refracción que experimenta el rayo. b) Calcular la longitud de onda de la luz que atraviesa el agua, sabiendo que la frecuencia de la luz incidente y la frecuencia de la luz refractada son iguales. c) Explicar brevemente el concepto de ángulo límite y el funcionamiento de la fibra óptica.

Respuesta:

- a) El esquema podría ser el siguiente:



- b) Para conocer la longitud de onda de la luz en el agua, debemos conocer su frecuencia, que es independiente del medio de propagación. Tendremos, así, que:

$$\lambda_m = 2 \cdot 10^{-7} = \frac{3 \cdot 10^8 / 2,5}{\nu} \rightarrow \nu = 6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

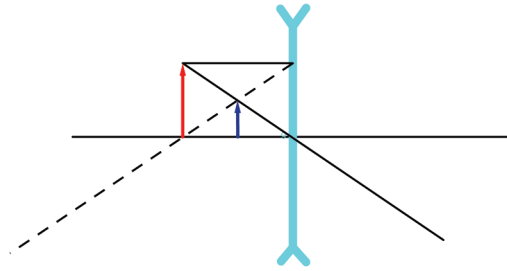
Con este dato, podremos escribir:

$$\lambda_a = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 / 1,33}{6 \cdot 10^{14}} = 3,76 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

2. Supongamos un sistema óptico consistente en una lente divergente delgada que tiene una distancia focal en valor absoluto de 8 cm . Determina la posición, tamaño y naturaleza de la imagen que se obtiene de un objeto de altura $2,5 \text{ cm}$ que se sitúa a una distancia de 12 cm de la lente: a) Cualitativamente mediante trazado de rayos. b) Cuantitativamente mediante el uso de las fórmulas correspondientes.

Respuesta:

- a) El diagrama de rayos es el siguiente:



b) Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{f'} \quad \frac{1}{-0,12} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{0,08} \rightarrow s' = -0,048 \text{ m}$$

El aumento lateral es:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad y' = 0,025 \frac{-0,048}{-0,12} = 0,01 \text{ m}$$

Con la representación gráfica y los datos numéricos podemos afirmar que la imagen es **menor**, **derecha** y **virtual**.

3. . A 12 cm de una lente delgada convergente se sitúa un objeto de 2 cm de altura y produce una imagen a 14 cm a la derecha de la lente: a) Calcúlese, mediante las fórmulas correspondientes, la distancia focal y el tamaño de la imagen. b) Realizar el análisis cualitativo mediante el trazado de rayos de la naturaleza de la imagen formada.

Respuesta:

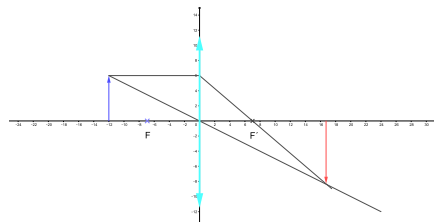
a) Aplicando la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{-0,12} - \frac{1}{0,14} = -\frac{1}{f'} \quad f' = 0,065 \text{ m}$$

Mediante la fórmula del aumento lateral:

$$\frac{y'}{0,02} = \frac{0,14}{-0,12} \quad y' = 0,023 \text{ m}$$

b) El diagrama de rayos es el siguiente:



4. Un material de caras planas y paralelas tiene un espesor d y un índice de refracción de 1.45. Si lo colocamos entre agua ($n = 1.33$) y aire ($n = 1$) e incidimos con un rayo de luz monocromática de frecuencia $4.5 \cdot 10^{14}$ Hz desde el agua en el material, determinar: a) La longitud de onda del rayo en el agua y en el material. b) El ángulo de incidencia a partir del cual se produce reflexión total interna en

la segunda cara.

Respuesta:

a) La velocidad de la luz en el agua y en el material son, respectivamente:

$$v_a = \frac{3 \cdot 10^8}{1,33} = 2,26 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_m = \frac{3 \cdot 10^8}{1,45} = 2,07 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Con estos datos, las longitudes de onda respectivas serán:

$$\lambda_a = \frac{2,26 \cdot 10^8}{4,5 \cdot 10^{14}} = 5,02 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad \lambda_m = \frac{2,07 \cdot 10^8}{4,5 \cdot 10^{14}} = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

b) Para que se produzca reflexión total en la segunda cara, debe cumplirse:

$$\frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{1}{1,45} \quad \text{sen } \alpha_2 = 0,69$$

Este ángulo es, a su vez, el ángulo de refracción en la primera cara (aire/material). Aplicando nuevamente la ley de Snell, tendremos:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{0,69} = \frac{1,45}{1,33} \quad \text{sen } \alpha_1 = 0,75 \quad \alpha_1 = 48,6^\circ$$

5. Un haz de luz monocromática, de longitud de onda en el aire de $\lambda_0 = 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, incide desde el aire, sobre un vidrio plano de índice 1,5 con un ángulo de incidencia de 30° . Por el otro lado del vidrio hay agua (índice 1,33). Determinar: a) El ángulo de refracción en el vidrio (entrada desde el aire) y el ángulo de salida por el agua. b) La longitud de onda de dicho haz en el agua.

Respuesta:

a) Aplicando la Ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } \alpha_{r1}} = \frac{1,5}{1} \quad \alpha_{r1} = 19,47^\circ$$

$$\frac{\text{sen } 19,47^\circ}{\text{sen } \alpha_{r2}} = \frac{1,33}{1,5} \quad \alpha_{r2} = 22,1^\circ$$

b) teniendo en cuenta que la frecuencia de la radiación no depende del medio, tendremos:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{6,0 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

la longitud de onda en el agua será:

$$\lambda_a = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 / 1,33}{5 \cdot 10^{14}} = 4,51 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

6. Si tenemos una lente convergente de 20 dioptrías. a) ¿Con qué tamaño se vería un objeto de 2 mm de altura si la lente se pone a 3,4 cm de distancia? b) Características de la imagen. c) Realiza el diagrama de rayos cualitativo correspondiente.

Respuesta:

a) Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas, tendremos:

$$\frac{1}{-0,034} - \frac{1}{s'} = -P = -20$$

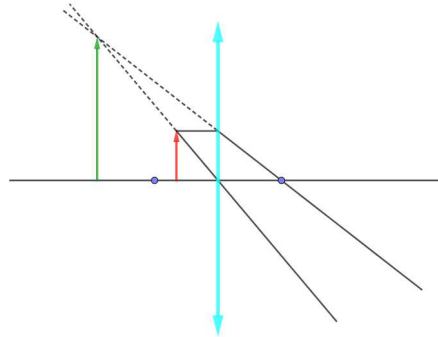
Despejando: $s' = -0,106$ m.

Aplicando la ecuación del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad y' = 2 \frac{-0,106}{-0,034} = 6,23 \text{ mm}$$

b) La imagen será **mayor, derecha y virtual**

c) El diagrama de rayos es el siguiente:



7. Un objeto de 15 cm de altura se coloca a 1,2 m de una lente delgada y se obtiene una imagen derecha y virtual, de 0,75 m de altura: a) Calcula la distancia focal y la potencia de la lente. ¿A qué tipo de lente se corresponde? b) Realiza el trazado de rayos correspondiente.

Respuesta:

a) A partir de la expresión del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad s' = \frac{0,75 (-1,2)}{0,15} = -6 \text{ m}$$

Con este dato, podemos hallar la potencia de la lente:

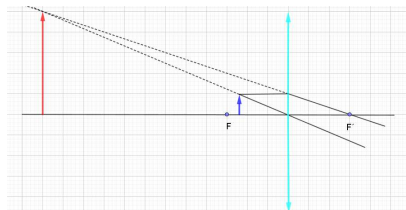
$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -P \quad P = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-6} - \frac{1}{-1,2} = 0,67 \text{ dp}$$

La distancia focal es:

$$f' = \frac{1}{P} = 1,5 \text{ m}$$

La potencia positiva nos indica que la lente es **convergente**.

b) El diagrama de rayos es el siguiente:



8. Un rayo de luz pasa desde un medio de índice de refracción 1.8 a otro medio de índice 1.3 a través de una superficie plana. a) Si el ángulo de incidencia es de 30° , determina el ángulo de refracción y el de

reflexión. b) Calcula el ángulo (de incidencia) a partir del cual no se produce refracción.

Respuesta:

a) Aplicando la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } \alpha_r} = \frac{1,3}{1,8} \quad \alpha_r = 43,81^\circ$$

El ángulo de reflexión es el mismo que el de incidencia, es decir, 30° .

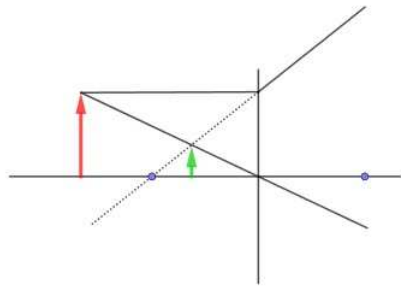
b) Aplicando de nuevo la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } \alpha_i}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{1,3}{1,8} \quad \alpha_i = 46,23^\circ$$

9. Una lente divergente delgada tiene una distancia focal de 6 cm (en valor absoluto). Determina la posición tamaño y naturaleza de la imagen que se obtiene de un objeto de altura 4 cm que se sitúa 10 cm a la izquierda de la lente. a) Mediante trazado de rayos. b) Cuantitativamente. c) Describe razonadamente el tipo de imagen que se obtiene con una lente divergente

Respuesta:

a) El trazado de rayos es:



b) Aplicando la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{f'} \quad \frac{1}{-0,1} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{0,06} \quad s' = -0,0375 \text{ m}$$

$$y' = y \frac{s'}{s} = 4 \frac{-0,0375}{-0,1} = 0,15 \text{ cm}$$

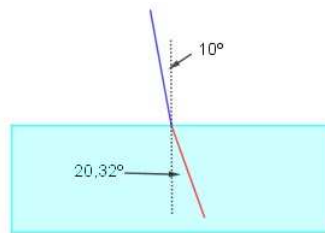
c) La imagen obtenida es virtual, menor y derecha.

10. Una onda monocromática se propaga por un medio con una velocidad v e incide sobre la superficie de separación con otro medio donde la velocidad de propagación es $v' = 2 \cdot v$. a) Si el ángulo de incidencia es $\vartheta = 10^\circ$, calcula y dibuja el ángulo de refracción. b) Calcula e indica el ángulo límite.

Respuesta:

a) Puesto que el índice de refracción es: $n = \frac{c}{v}$, si el índice de refracción del primer medio es n , el del segundo será $n/2$, por lo cual:

$$\frac{\text{sen } 10}{\text{sen } \alpha} = \frac{n/2}{n} \quad \alpha = 20,32^\circ$$



b) Aplicando de nuevo la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } \alpha_L}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{n/2}{n} \quad \alpha_L = 30^\circ$$

11. Un rayo de luz monocromática se propaga desde un recipiente lleno de líquido de índice de refracción 1.30 hacia el aire. a) Si el ángulo de incidencia es $= 30^\circ$, calcula el ángulo de refracción. b) Calcula la velocidad de la luz en el líquido.

Respuesta:

a) Aplicando la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } \alpha_r} = \frac{1}{1,30} \quad \alpha_r = 40,54^\circ$$

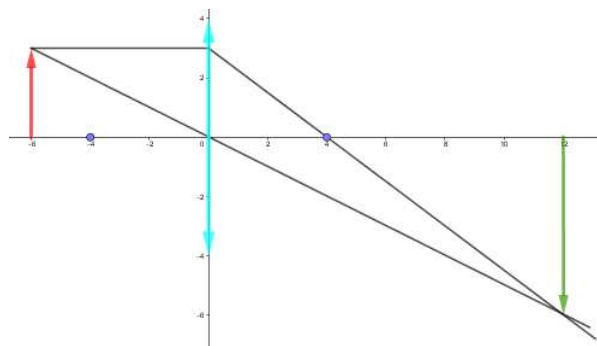
b) La velocidad de la luz en el líquido es:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,30} = 2,31 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

12. A 15 cm a la izquierda de una lente delgada convergente de distancia focal 10 cm se sitúa un cuerpo de 1 cm de altura. a) Determina la posición de la imagen mediante trazado de rayos. b) Determina numéricamente la posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen.

Respuesta:

a) El trazado de rayos es el siguiente:



A partir de la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{-0,15} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{0,1} \quad s' = 0,3 \text{ m}$$

A partir de la expresión del aumento lateral:

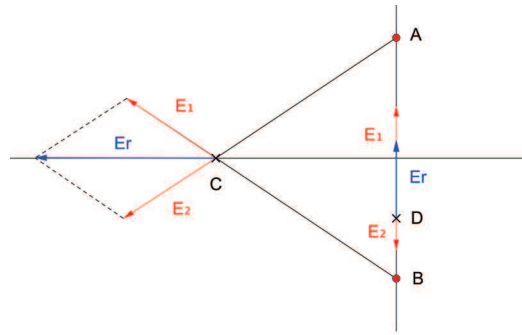
$$\frac{y'}{1} = \frac{0,3}{-0,15} \quad y' = -2 \text{ cm}$$

La imagen es **mayor, real e invertida**.

4. Electromagnetismo.

1. Dos cargas puntuales iguales de $+2\mu\text{C}$ se encuentran en los puntos A (0, 2) m y B (0, -2) m. Calcula:
 a) El vector campo y el potencial electrostático en los puntos C (-3, 0) m y D (0,-1) m. b) Calcula el trabajo necesario para trasladar una carga de $+3\mu\text{C}$ desde el infinito al punto C e interpreta el signo. ¿Y para trasladar esa carga entre D y C ?

Respuesta: a) La representación gráfica es la siguiente: dada la situación de las cargas en A y en B,



la intensidad de campo creada en el punto C tendrá el mismo módulo para ambas, es decir:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{3^2 + 2^2})^2} = 1384,6 \text{ N/C}$$

Las componentes verticales son iguales y opuestas, por lo que la intensidad de campo resultante será:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -2 \cdot 1384,6 \cdot \cos \alpha \vec{i}$$

Siendo α el ángulo que forma cualquiera de los dos vectores campo con el eje X. Su valor es:

$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33,7^\circ$$

Sustituyendo este valor:

$$\vec{E} = -2 \cdot 1384,6 \cdot 0,832 \vec{i} = -2304 \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

En el punto D, tendremos:

$$\vec{E}_1 = -\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3^2} \vec{j} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2^2} \vec{j} = 2500 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Los potenciales respectivos en C y D serán:

$$V_C = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{13}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{13}} = 9984,6 \text{ V} \quad V_D = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2} = 15000 \text{ V}$$

- b) Para trasladar una carga desde el infinito hasta el punto C, el trabajo necesario será:

$$W = q(V_\infty - V_C) = 3 \cdot 10^{-6}(0 - 9984,6) = -0,03 \text{ J}$$

El signo negativo indica que el trabajo debe ser realizado por una fuerza externa que se opone al campo. Para trasladar la carga desde D hasta C, el trabajo será:

$$W = q(V_D - V_C) = 3 \cdot 10^{-6}(15000 - 9984,6) = 0,015 \text{ J}$$

El signo positivo del trabajo nos indica, en este caso, que dicho trabajo es realizado por el campo eléctrico.

2. Un campo magnético espacialmente uniforme y que varía con el tiempo según la expresión $B(t) = 2,4 \cos(4t)$ (en unidades del S.I.) atraviesa perpendicularmente una espira cuadrada de lado 15 cm.
a) Determinar el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo. b) Hallar la fuerza electromotriz máxima.

Respuesta:

- a) El área de la espira será: $S = 0,15^2 = 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ El flujo magnético será:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = 2,4 \cdot 2,25 \cdot 10^{-2} \cos 4t = 0,054 \cos 4t \text{ wb}$$

- b) La fuerza electromotriz será:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -0,054 \cdot 4 [-\text{sen}(4t)] \rightarrow \varepsilon_{max} = 0,054 \cdot 4 = 0,216 \text{ V}$$

3. Un protón con velocidad $\vec{v} = 5 \cdot 10^6 \vec{i}$, en m/s penetra en una zona donde hay un campo magnético $\vec{B} = 1 \vec{j} \text{ T}$. a) Obtén la fuerza que actúa sobre el protón. b) Obtén el radio de la trayectoria. c) Calcula el tiempo que tardaría en realizar una vuelta.

Respuesta:

- a) La fuerza sobre el protón es:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1 \vec{k} = 8 \cdot 10^{-13} \vec{k} \text{ N}$$

- b) El radio de la trayectoria es:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,710^{-27} \cdot 5 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 0,047 \text{ m}$$

- c) El tiempo que invierte en dar una vuelta tiene el valor:

$$t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 0,047}{5 \cdot 10^6} = 5,91 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

4. Dos cargas positivas idénticas de valor $q_1 = q_2 = 4,0 \mu\text{C}$ ($1\mu\text{C} = 10^{-6}\text{C}$) están situadas sobre el eje x en las posiciones $x_1 = -5 \text{ cm}$ y $x_2 = 5 \text{ cm}$. a) Calcular el vector campo eléctrico creado por las dos cargas en el punto ($x = 0, y = 3 \text{ cm}$). Representarlo gráficamente. b) ¿Cuál es la fuerza que experimentaría una carga de $2 \mu\text{C}$ colocada en las coordenadas ($x = 5, y = 3$) en cm.?

Respuesta:

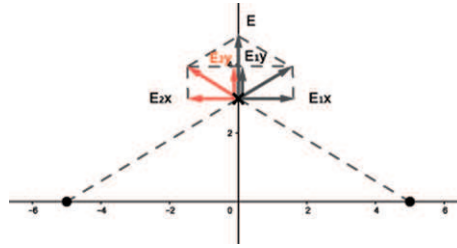
- a) El módulo del campo eléctrico creado por cada una de las cargas es:

$$E_1 = E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4,0 \cdot 10^{-6}}{0,05^2 + 0,03^2} = 1,06 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

La representación gráfica es la siguiente:

En la anterior representación podemos observar que las componentes horizontales de E_1 y E_2 se anulan entre sí, con lo que el campo resultante será: $\vec{E}_r = (E_{1y} + E_{2y}) \vec{j}$. Puesto que las componentes verticales son iguales entre sí, podremos poner: $E_{1y} = E_{2y} = E_1 \text{sen} \alpha$, siendo $\text{sen} \alpha = \frac{3}{5}$. Así pues, tendremos:

$$\vec{E}_r = (2 \cdot E_1 \text{sen} \alpha) \vec{j} = 2 \cdot 1,06 \cdot 10^7 \cdot \frac{3}{5} = 1,27 \cdot 10^7 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$



b) El módulo de la fuerza debida a la primera carga será:

$$|\vec{F}_1| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{0,1^2 + 0,03^2} = 6,61 \text{ N}$$

La fuerza \vec{F}_1 será: $\vec{F}_1 = 6,61 \cdot \text{sen}\beta \vec{i} + 6,61 \cdot \text{cos}\beta \vec{j}$, siendo $\text{sen}\beta = \frac{3}{10}$ y $\text{cos}\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = 0,95$, es decir:

$$\vec{F}_1 = 6,61 \cdot 0,3 \vec{i} + 6,61 \cdot 0,95 \vec{j} = 1,98 \vec{i} + 6,28 \vec{j}$$

La fuerza F_2 será:

$$\vec{F}_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0,03^2} \vec{j} = 80 \vec{j}$$

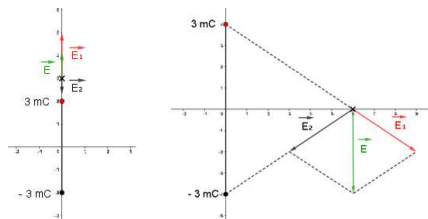
La fuerza resultante será pues:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 1,98 \vec{i} + 6,28 \vec{j} + 80 \vec{j} = 1,98 \vec{i} + 86,28 \vec{j}$$

- a) Dos cargas eléctricas puntuales de valor 3 mC y -3 mC se encuentran situadas en el plano XY, en los puntos (0,4) y (0,-4) respectivamente, estando las distancias expresadas en m. a) Calcular y representar gráficamente la intensidad de campo en los puntos (0,6) y (6,0). b) ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo sobre un protón cuando se desplaza desde el punto (0,6) hasta el punto (6,0)?

Respuesta:

a) Las representaciones gráficas son las siguientes:



En el punto (0,6) podemos ver que el campo creado por cada una de las cargas está dirigido a lo largo del eje Y, siendo opuestos los sentidos. El campo resultante será, pues:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{2^2} \vec{j} - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{10^2} \vec{j} = 6,48 \cdot 10^6 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

En el punto (6,0) tendremos que el módulo del vector campo, creado por cada una de las cargas, tiene el mismo valor, siendo:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{6^2 + 4^2} = 5,19 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Los ángulos formados por \vec{E}_2 y \vec{E}_1 con el eje X, respectivamente, cumplirán:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{6} \quad \alpha = -33,69^\circ \quad \beta = -180 - (-33,69) = -146,31^\circ$$

El campo resultante en el punto (6,0) será:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 5,19 \cdot 10^5 \left[\left(\cos -146,31 \vec{i} + \operatorname{sen} -146,31 \vec{j} \right) + \left(\cos -33,69 \vec{i} + \operatorname{sen} -33,69 \vec{j} \right) \right]$$

$$\vec{E} = -5,73 \cdot 10^5 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) El trabajo realizado será: $W = q (V_A - V_B)$, siendo V_A y V_B los respectivos potenciales en los puntos (0,6) y (6,0):

$$V_A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{2} - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{10} = 1,08 \cdot 10^7 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{4^2 + 6^2}} - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = 0 \text{ V}$$

El trabajo realizado será, pues: $W = 1,6 \cdot 10^{-19} (1,08 \cdot 10^7 - 0) = 1,73 \cdot 10^{-12} \text{ J}$

5. Una bobina de 200 espiras circulares de 3 cm de radio se halla inmersa en un campo magnético uniforme $B = 0,1 \text{ T}$ en la dirección del eje de la bobina. Determina la f.e.m. media inducida en el circuito y el sentido de la corriente inducida si en un intervalo de tiempo $t = 0,05 \text{ s}$: a) El campo magnético se anula. b) El campo invierte su sentido.

Respuesta:

La fuerza electromotriz media inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(NBS)}{\Delta t}$$

a) En este caso, tendremos:

$$\varepsilon = -\frac{(0,1 - 0) \cdot 200 \cdot \pi \cdot 0,03^2}{0,05} = -1,13 \text{ V}$$

b) Cuando el campo invierte su sentido:

$$\varepsilon = -\frac{(0,1 - 0,1) \cdot 200 \cdot \pi \cdot 0,03^2}{0,05} = 0 \text{ V}$$

6. Un electrón se dirige, en el vacío, con velocidad $\vec{v} = -8 \cdot 10^7 \vec{j} \text{ m/s}$ hacia un conductor rectilíneo infinito, perpendicular a su trayectoria por el que circula una corriente en sentido ascendente de 2 A. Determina: a) El vector campo magnético que crea el conductor a una distancia de 2 metros del mismo. b) La fuerza magnética que el conductor ejerce sobre el electrón cuando está en ese punto. Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^2$.

Respuesta:

a) Aplicando la regla de la mano derecha, el vector campo magnético a una distancia de 2m del conductor será:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 2} \vec{i} = -2 \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T}$$

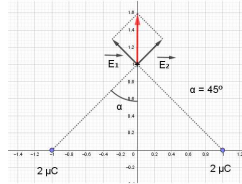
b) La fuerza ejercida sobre el electrón será:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (-8 \cdot 10^7) \vec{j} \times (-2 \cdot 10^{-7}) \vec{i} = -2,56 \cdot 10^{-18} \vec{k} \text{ N}$$

7. Dos partículas cargadas $Q_1 = Q_2 = +2\mu\text{C}$, están situadas en los puntos $Q_1: (1,0)$ y $Q_2: (-1,0)$. Todas las coordenadas están expresadas en metros. a) Expresa correctamente el valor del campo eléctrico en el punto $(0,1)$. b) ¿Qué valor debe tener una carga Q_3 situada en $(0,2)$ para que una carga situada en el punto $(0,1)$ no experimente ninguna fuerza neta? c) En el caso anterior, ¿cuánto vale el potencial eléctrico resultante en el punto $(0,1)$ debido a las cargas Q_1, Q_2 y Q_3 ?

Respuesta:

- a) El campo eléctrico puede ser representado en la siguiente gráfica:



Como puede verse, el campo resultante sólo tendrá componente y, pues las componentes x de cada uno de los campos se anulan entre sí. De esta forma, el campo resultante será:

$$\vec{E} = 2 \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2} \cos 45^\circ \vec{j} = 12728 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- b) Para que una carga situada en el punto $(0,1)$ no experimente fuerza, en el punto $(0,2)$ deberá existir una carga que cree en el punto $(0,1)$ un campo eléctrico del mismo módulo y dirección, pero de sentido contrario al del apartado a). dicha carga deberá ser positiva, por tanto:

$$12728 = \frac{9 \cdot 10^9 Q_3}{1} \quad Q_3 = 1,41 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

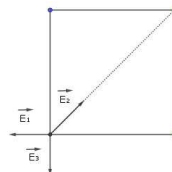
- c) El potencial eléctrico en el punto $(0,1)$, debido a las tres cargas será:

$$V = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,41 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 34429 \text{ V}$$

8. Tres cargas eléctricas puntuales de valor $1 \mu\text{C}$, $-2 \mu\text{C}$ y $1\mu\text{C}$, se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 3 metros de lado, en los puntos $(3, 0)$ $(3, 3)$ y $(0, 3)$ respectivamente, estando las distancias expresadas en m. a) Calcular y representar gráficamente la intensidad de campo en el punto $(0,0)$. b) ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo sobre una carga de $1.5 \mu\text{C}$ cuando se desplaza desde el centro del cuadrado hasta el punto $(0,0)$?

Respuesta:

- a) La representación gráfica de la intensidad de campo es:



Con los datos del enunciado podemos escribir:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_3| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^6}{3^2} = 1000 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} \quad |\vec{E}_2| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^6}{3^2 + 3^2} = 1000 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

La intensidad de campo en el origen será:

$$\vec{E} = -10^3 \vec{i} - 10^3 \vec{j} + 10^3(\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}) = -293 \vec{i} - 293 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) El trabajo realizado será: $W = U_0 - U$, siendo:

$$U_0 = 2 \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 10^{-6}}{\frac{\sqrt{18}}{2}} + \frac{9 \cdot 10^9 (-2 \cdot 10^{-6}) 1,5 \cdot 10^{-6}}{\frac{\sqrt{18}}{2}} = 0$$

$$U = 2 \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 10^{-6}}{3} + \frac{9 \cdot 10^9 (-2 \cdot 10^{-6}) 1,5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{18}} = -2,64 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$W = U_0 - U = 0 - (-2,64 \cdot 10^{-3}) = 2,64 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

9. Un electrón se mueve al entrar dentro de un campo magnético con una velocidad $\vec{v} = 10^4 \vec{i}$ m/s. Sabiendo que el campo ejerce una fuerza sobre él igual a $10^{-16} \vec{j}$ N. Determinar: a) El módulo y la dirección del campo magnético que actúa sobre la partícula. b) Si la velocidad fuera $10^6 \vec{k}$ m/s ¿cuál sería entonces la magnitud y dirección del campo magnético? c) Justifica si una partícula que entre en un campo magnético siempre nota su efecto en su trayectoria.

Respuesta:

a) Suponiendo que el campo magnético sea perpendicular a la trayectoria del electrón, el módulo de dicho campo magnético sería:

$$B = \frac{F}{qv} = \frac{10^{-16}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4} = 0,0625 \text{ T}$$

Al actuar sobre una carga negativa, el campo magnético actúa en el sentido positivo del eje Z.

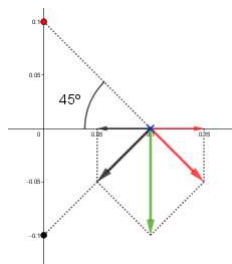
b) Si el electrón se desplaza a lo largo del eje Z, al ser el movimiento de éste paralelo al campo magnético, éste no ejercerá fuerza sobre aquel, pues $|\vec{F}| = q |\vec{v} \times \vec{B}| \sin 0^\circ = 0$

c) La respuesta está en el apartado b). Siempre que la partícula cargada se mueva de forma paralela al campo, éste no ejercerá influencia sobre ella.

10. Dos cargas eléctricas puntuales de valor $1 \mu\text{C}$, y $-1 \mu\text{C}$, se encuentran situadas en los puntos $(0, 0.1)$ y $(0, -0.1)$ respectivamente, estando las distancias expresadas en m. a) Calcular y representar gráficamente la intensidad de campo en el punto $(0.1, 0)$. b) ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo sobre una carga de $2 \mu\text{C}$ cuando se desplaza desde el $(0.1, 0)$ hasta el punto $(0.1, 0.1)$?

Respuesta:

a) De la siguiente representación gráfica:



Podemos deducir los siguiente:

$$\vec{E}_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{0,1^2 + 0,1^2} (\vec{i} \cos 45^\circ - \vec{j} \sin 45^\circ) = 3,18 \cdot 10^5 \vec{i} - 3,18 \cdot 10^5 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{0,1^2 + 0,1^2} (-\vec{i} \cos 45^\circ - \vec{j} \sin 45^\circ) = -3,18 \cdot 10^5 \vec{i} - 3,18 \cdot 10^5 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -2 \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{0,1^2 + 0,1^2} \vec{j} \sin 45^\circ = -6,36 \cdot 10^5 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) El trabajo realizado para desplazar la carga será:

$$W = q(V_A - V_B)$$

Siendo:

$$V_A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0,1^2 + 0,1^2}} + \frac{9 \cdot 10^9 (-10^{-6})}{\sqrt{0,1^2 + 0,1^2}} = 0 \text{ V} \quad V_B = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0,1^2}} + \frac{9 \cdot 10^9 (-10^{-6})}{\sqrt{0,1^2 + 0,2^2}} = 4,98 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$W = 2 \cdot 10^{-6} (0 - 4,98 \cdot 10^4) = 0,1 \text{ J}$$

11. Una espira rectangular de 4 cm^2 gira dentro de un campo magnético de $0,5 \text{ T}$ dando lugar a una fuerza electromotriz sinusoidal. a) Dar la expresión de la fuerza electromotriz en función de la frecuencia de rotación de la espira. b) Si la fuerza electromotriz máxima es de $0,05 \text{ V}$ ¿cuál es la frecuencia de rotación de la espira?

Respuesta:

a) La fuerza electromotriz inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d(4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \cdot \cos \omega t)}{dt} = 2 \cdot 10^{-2} \omega \sin \omega t = 4\pi \cdot 10^{-2} \nu \sin 2\pi \nu \text{ V}$$

b) A partir de la fem máxima:

$$0,05 = 4\pi \cdot 10^{-2} \nu \quad \nu = 0,40 \text{ s}^{-1}$$

5. Física moderna.

1. La función trabajo de un cierto metal es $6.0 \cdot 10^{-19}$ J, calcula: a) La frecuencia umbral. b) Si se ilumina el metal con una luz incidente de 320 nm ($1\text{nm} = 10^{-9}$ m) calcular la velocidad máxima de los electrones emitidos. c) Si la longitud de onda de luz incidente se reduce a la mitad, ¿cuál será la velocidad máxima de los electrones emitidos?

Respuesta:

a) la frecuencia umbral será:

$$\nu_0 = \frac{W_{ext}}{h} = \frac{6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 9,1 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$$

b) la ecuación del efecto fotoeléctrico puede escribirse también de la forma:

$$\frac{hc}{\lambda} = W_{ext} + \frac{1}{2}mv^2$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3,2 \cdot 10^{-7}} = 6 \cdot 10^{-19} + \frac{1}{2}9,1 \cdot 10^{-31}v^2 \quad \text{obteniéndose : } v = 2,03 \cdot 10^5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Si $\lambda = 1,6 \cdot 10^{-7}$ m, tendremos:

$$\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-7}} = 6 \cdot 10^{-19} + \frac{1}{2}9,1 \cdot 10^{-31}v^2 \quad \text{obteniéndose : } v = 1,18 \cdot 10^6 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Una muestra de una sustancia radiactiva presenta una actividad inicial de $6.2 \cdot 10^7$ Bq y de $1.6 \cdot 10^7$ Bq cuando han transcurrido 12 días. a) Calcular la constante de desintegración y el periodo de semidesintegración de dicha sustancia b) La actividad de una segunda muestra de la misma sustancia es de $2.8 \cdot 10^8$ Bq cuando han transcurrido 20 días. Hallar cuántos núcleos radiactivos había inicialmente en esta segunda muestra. Datos: 1 Bq = 1 desintegración por segundo.

Respuesta:

a) Teniendo en cuenta la expresión:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

Sustituyendo valores,

$$1,6 \cdot 10^7 = 6,2 \cdot 10^7 e^{-\lambda \cdot 12} \quad \lambda = \frac{\ln(1,6/6,2)}{12} = 0,113 \text{días}^{-1}$$

El periodo es:

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{0,113} = 6,13 \text{días}$$

b) Al cabo de 20 días, la actividad es de $2.8 \cdot 10^8$ Bq. la actividad inicial se calcula a partir de la igualdad:

$$2,8 \cdot 10^8 = A_0 e^{-0,113 \cdot 20} \quad A_0 = 2,68 \cdot 10^9 \text{Bq}$$

teniendo en cuenta que $A = \lambda N$, tendremos:

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{2,68 \cdot 10^9}{0,113} = 2,37 \cdot 10^{10} \text{núcleos}$$

3. El período de semidesintegración de un elemento radiactivo es de 5.3 años y se desintegra emitiendo una partícula β . Calcula: a) El tiempo que tarda la muestra en convertirse en el 80 % de la original. b) La actividad radiactiva de una muestra de 10^{15} átomos transcurridos 2 años. c) Describir brevemente el proceso de desintegración en el que se emite una partícula β .

Respuesta:

a) La constante de desintegración tiene el valor:

$$\lambda = \frac{0,693}{T} = \frac{0,693}{5,3} = 0,131 \text{ años}^{-1}$$

Aplicando la ley de la desintegración radiactiva:

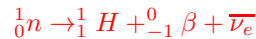
$$0,8 N_0 = N_0 e^{-0,131t} \quad t = 1,70 \text{ años}$$

b) Al cabo de 2 años, el número de núcleos restantes será:

$$N = 10^{15} e^{-0,131 \cdot 2} \quad N = 7,69 \cdot 10^{14} \text{ núcleos}$$

La actividad de la muestra será, entonces: $A = \lambda N = 0,131 \cdot 7,69 \cdot 10^{14} = 1,00 \cdot 10^{14} \text{ Bq}$

c) En este proceso, un neutrón se descompone en un protón, un electrón y un antineutrino electrónico, lo que se representa de la siguiente forma:



4. El trabajo de extracción de un metal es 3.2 eV ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). Sobre él incide radiación de longitud de onda $\lambda = 340 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Calcula: a) La frecuencia umbral y la velocidad máxima con la que son emitidos los electrones. b) Si la longitud de onda se reduce a la tercera parte, ¿cuál es, en su caso, la nueva velocidad máxima que adquieren los electrones? c) Describir el concepto de frecuencia umbral y su relación con la hipótesis cuántica de Planck.

Respuesta:

a) El trabajo de extracción, expresado en julios, es: $E = 3,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 5,12 \cdot 10^{-19}$. La frecuencia umbral será:

$$\nu_0 = \frac{5,12 \cdot 10^{-19}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 7,72 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

La energía de la radiación incidente es: $E = h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{3,4 \cdot 10^{-7}} = 5,85 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. La velocidad de los electrones emitidos será:

$$v = \sqrt{\frac{2(E - E_0)}{m}} = \sqrt{\frac{2(5,85 \cdot 10^{-19} - 5,12 \cdot 10^{-19})}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 4,00 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Si la longitud de onda se reduce a la tercera parte, la energía de la radiación incidente será:

$$E_2 = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{3,4 \cdot 10^{-7}/3} = 1,76 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

La nueva velocidad de los electrones emitidos tendrá el valor:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(E - E_0)}{m}} = \sqrt{\frac{2(1,76 \cdot 10^{-18} - 5,12 \cdot 10^{-19})}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,66 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) La frecuencia umbral es la mínima frecuencia que debe tener la radiación incidente sobre una superficie para que se produzca la emisión fotoeléctrica. Este concepto representa una prueba de la naturaleza

corpúscular de la luz. La teoría cuántica establece que la radiación electromagnética está constituida por cuantos de energía, de valor $E = h\nu$. Al irradiar la superficie de un metal con luz de una determinada frecuencia, puede producirse la emisión de electrones de la misma o, no tener lugar dicha emisión, en función de la frecuencia de la radiación incidente.

5. En una muestra radiactiva, transcurridos 30 días su actividad es una cuarta parte de la que tenía al principio. a) Determina el valor de la constante de desintegración y calcula el periodo de semidesintegración. b) Si la actividad de la muestra en ese momento vale $6,4 \cdot 10^{14}$ Bq, calcula cuántos átomos radiactivos había inicialmente. c) Describe brevemente un proceso de desintegración en el que se emite una partícula β .

Respuesta:

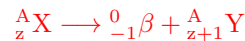
a) Al ser la actividad la cuarta parte de la inicial, también lo será el número de núcleos con respecto al número inicial. Así pues:

$$0,25 N_0 = N_0 e^{-\lambda \cdot 30} \quad \lambda = 0,046 \text{ días}^{-1}$$

b) la actividad en ese momento es:

$$6,4 \cdot 10^{14} = 0,046 N \quad N = 1,39 \cdot 10^{16} \text{ núcleos} \quad N_0 = 5,56 \cdot 10^{16} \text{ núcleos}$$

c) Un proceso de desintegración β puede ser representado de la siguiente forma:



Es decir, tras emitir una radiación beta, un átomo se transforma en otro cuyo número atómico es superior en una unidad al del átomo inicial, y cuyo número másico no varía.

6. El trabajo de extracción para el aluminio es de 4,2 eV ($6,72 \cdot 10^{-19}$ J). Si se ilumina una superficie de este material con radiación de $15 \cdot 10^{-9}$ m. Determina: a) La longitud de onda umbral para el aluminio. b) La energía cinética máxima de los electrones emitidos.

Respuesta:

a) La longitud de onda umbral será:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_{\text{ext}}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6,72 \cdot 10^{-19}} = 2,96 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

b) La energía cinética se calcula a partir de:

$$\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{-8}} = 6,72 \cdot 10^{-19} + E_c \quad E_c = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

7. El trabajo de extracción de electrones para un determinado metal es de 4,34 eV ($6,944 \cdot 10^{-19}$ J). a) Calcula cuál es la longitud de onda máxima para producir el efecto fotoeléctrico en dicho metal. b) Si se ilumina el metal con una luz de longitud de onda $\lambda_{\text{max}}/2$ ¿qué energía cinética máxima adquieren los electrones? (si no has obtenido el resultado anterior toma un valor razonable para realizar el cálculo).

Respuesta:

a) El trabajo de extracción puede expresarse de la forma:

$$W_{\text{ext}} = h\nu_0 = h \frac{c}{\lambda_0}$$

Con lo que la longitud de onda máxima será:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_{\text{ext}}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6,944 \cdot 10^{-19}} = 2,86 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

b) La energía de la radiación incidente será:

$$E = \frac{hc}{\lambda_0/2} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,43 \cdot 10^{-7}} = 1,388 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Y la energía cinética adquirida por los electrones será:

$$E_c = E - W_{\text{ext}} = 1,39 \cdot 10^{-18} - 6,944 \cdot 10^{-19} = 6,944 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

8. El ^{60}Co es un isótopo radiactivo cuyo periodo de semidesintegración es de 5,25 años. a) Calcula su constante de desintegración. b) ¿Qué masa de ^{60}Co tendremos al cabo de dos años si se tiene una masa inicial de 50 g?

Respuesta:

a) La constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{0,693}{T} = \frac{0,693}{5,25} = 0,132 \text{ años}^{-1}$$

b) La masa al cabo de 2 años será:

$$m = 50 \cdot e^{-0,132 \cdot 2} = 38,40 \text{ g}$$

9. El tritio es un isótopo radiactivo del hidrógeno que emite partículas β con una vida media de 12,5 años. a) Calcular la constante de desintegración radiactiva. b) ¿Qué fracción de la muestra original quedará al cabo de 17,32 años? c) Explica en qué consiste una desintegración α .

Respuesta:

a) La vida media es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \lambda = \frac{1}{12,5} = 0,08 \text{ años}^{-1}$$

b) Al cabo de 17,32 años tendremos:

$$N = N_0 e^{-0,08 \cdot 17,32} = 0,25 N_0$$

Es decir, la muestra ha quedado reducida a un 25 % de la inicial.

10. El trabajo de extracción fotoeléctrico del un determinado metal es 2,07 eV. Determinar: a) La velocidad máxima con la que son emitidos los electrones, cuando se ilumina con luz de longitud de onda de 400 nm. b) Sabiendo que las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas entre 380 nm y 775 nm. ¿En qué rango de longitudes de onda de la luz visible se producirá el efecto fotoeléctrico? Dato: $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Respuesta:

a) Para una luz de 400 nm tendremos:

$$\frac{hc}{\lambda} = W_{\text{ext}} + \frac{1}{2} mv^2 \quad \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} = 2,07 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} + \frac{1}{2} 9,1 \cdot 10^{-31} v^2$$

$$v = 6,04 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La emisión fotoeléctrica comenzará cuando se cumpla:

$$\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\lambda} \geq 2,07 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \quad \lambda \leq 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Es decir, la emisión comenzará a producirse para longitudes de onda iguales o inferiores a 600 nm.

11. El ^{98}Mo es un isótopo radiactivo que se desintegra por fisión en dos ^{49}Sc . Sabiendo que la masa de ^{98}Mo es de 97.90541 u.a.m. y la de cada ^{49}Sc es de 48.95002 u.a.m. Sabiendo que 1 u.a.m. se corresponde con $935 \text{ MeV}/c^2$ a) Calcula el defecto de masa. b) La energía de la desintegración.

Respuesta:

a) la masa de los dos núcleos de ^{49}Sc es: $m = 48,95002 \cdot 2 = 97,90004 \text{ u}$. El defecto de masa será:
 $\Delta m = 97,90541 - 97,90004 = 5,37 \cdot 10^{-3} \text{ u}$

Respuesta:

b) La energía de la desintegración será:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 935 \cdot 5,37 \cdot 10^{-3} = 5,021 \text{ MeV}$$

12. El trabajo de extracción fotoeléctrico del sodio metálico es de 2.0 eV. Determinar: a) La velocidad máxima con la que son emitidos los electrones, cuando se ilumina con luz de longitud de onda de 400 nm. b) La frecuencia umbral para que sean emitidos los electrones de la superficie metálica. Dato: $1\text{eV}=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Respuesta:

a) Aplicando la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} + \frac{1}{2} 9,1 \cdot 10^{-31} v^2 \quad v = 6,24 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) la frecuencia umbral será:

$$W_{\text{ext}} = 3,2 \cdot 10^{-19} = 6,63 \cdot 10^{-34} \nu_0 \quad \nu_0 = 4,83 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$